

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

69. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 4. FEBRUAR 1958)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1958

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

69. Band

Inhalt

1. Heft

	Seite
Schmieden, C., und D. Laugwitz, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung	1
Leptin, H., Zur Reduktionstheorie Hilbertscher Räume	40
Dembowski, P., Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen	59
Klee jr., V. L., Extremal structure of convex sets. II	90

Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung

Von

CURT SCHMIEDEN und DETLEF LAUGWITZ

Inhaltsübersicht

Kapitel I. Grundlegung des Zahlbegriffs	4
§ 1. Definition der Ω -rationalen Zahlen als Limites rationaler Zahlfolgen	4
§ 2. Anordnungsbeziehungen	5
§ 3. Größenordnung	7
§ 4. Endliche Zahlen und reelle Zahlklassen	10
§ 5. Begriff und Eigenschaften des Grenzwerts	12
§ 6. Bemerkungen über eine mögliche Erweiterung	16
Bezeichnungen	
Kapitel II. Anfangsgründe der Analysis	19
§ 1. Der Funktionsbegriff	19
§ 2. Differentiation	24
§ 3. Integration	26
§ 4. Zwischenwertsatz und Mittelwertsätze	29
Kapitel III. Einige Beispiele und Anwendungen	30
§ 1. Die elementaren Funktionen	30
§ 2. δ -Funktionen	32
§ 3. Potenzreihen, insbesondere ihr Verhalten an der Konvergenzgrenze	35
§ 4. Bedingt-konvergente Reihen	37

Einleitung. Der Begriff der Cantor-Dedekindschen reellen Zahlen und damit die gesamte heutige Analysis beruhen auf der Festsetzung, daß zwei Folgen rationaler Zahlen der gleiche Grenzwert zuzuschreiben ist, wenn ihre Glieder sich schließlich um weniger als ε unterscheiden, wobei ε eine beliebige positive rationale Zahl ist. Äquivalent ist die Dedekindsche Auffassung: Jeder „Schnitt“ im Bereich der rationalen Zahlen wird von genau einer reellen Zahl erzeugt.

Man wird zugeben können, daß in dieser Festsetzung ein Element der Willkür liegt. Betrachten wir einen Schnitt, d.h. eine Aufteilung der rationalen Zahlen auf zwei Klassen, so daß jede Zahl der ersten Klasse kleiner ist als jede Zahl der zweiten Klasse, so motiviert DEDEKIND bekanntlich aus der „Stetigkeit“ der Zahlgeraden das Postulat der Existenz einer beide Klassen trennenden „reellen“ Zahl. Daß es zu jedem Schnitt nur eine einzige solche trennende Zahl gibt, ist eine weitere, bei DEDEKIND nicht motivierte Annahme.

Hier soll nun wenigstens in den Grundzügen gezeigt werden, daß eine nicht Dedekindsche Analysis tatsächlich möglich ist, welche auf einem Zahlbegriff aufbaut, für den das Dedekindsche Postulat (jedem Schnitt entspricht eine und nur eine reelle Zahl) nicht gilt; dann ist natürlich auch die eingangs genannte äquivalente Cantorsche Fassung nicht erfüllt. Es dürfen also zwei

Folgen rationaler Zahlen, die in der gewohnten Analysis den gleichen reellen Limes haben, hier verschiedene Grenzwerte besitzen. Die radikalste Möglichkeit ist offenbar die, zu postulieren, daß die Limes verschiedener Folgen stets ebenfalls verschieden sind; diese Annahme werden wir hier zugrunde legen.

Läßt man CANTORS Definition der Äquivalenz von Zahlfolgen fallen, so scheint es unvernünftig, das in der Formulierung gleichartige Konvergenzprinzip von CAUCHY zur Aussonderung der „konvergenten“ Folgen unter allen möglichen Folgen beizubehalten. Vielmehr kann man versuchen, auch für bisher divergente Folgen Limes einzuführen. Wieder wollen wir die am weitesten gehende Festsetzung zugrunde legen und überhaupt jeder beliebigen Folge von rationalen Zahlen einen Limes zuschreiben.

In Kapitel I wird das Rechnen mit diesen Limes untersucht. Die elementaren Rechenoperationen und die Größer-Beziehung lassen sich in naheliegender Weise erklären, und es zeigt sich, daß der Zahlbereich unendlich große Zahlen enthält, d.h. solche, die größer sind als jede natürliche Zahl. Entsprechend gibt es unendlich kleine, positive Zahlen. Der Zahlbereich erweist sich nun zwar als ein Ring, er enthält jedoch Nullteiler und ist nicht totalgeordnet (vermöge der Größer-Relation). Diese beiden Tatsachen, die zunächst als störend erscheinen mögen, haben ihren Grund darin, daß wir zur Definition unserer Zahlen beliebige Folgen rationaler Zahlen zugelassen haben. Man könnte versuchen, durch geeignete Einschränkung der zulässigen Folgen zu einem totalgeordneten Körper zu kommen. Dies ist aber aus zwei Gründen nicht empfehlenswert. Einmal verursachen nämlich Nullteiler und Unvergleichbarkeit mancher Elementpaare beweistechnisch hier keinerlei Schwierigkeiten; vielmehr würde jede zusätzliche, einschränkende Eigenschaft der definierenden Folgen die Beweise nur komplizieren. Und zweitens ist es sehr zweckmäßig, wenn für jede Folge ein Limes definiert ist, weil manche Divergenzschwierigkeiten dadurch wegfallen.

Im Kapitel II werden die Grundlagen der Analysis entwickelt, die wir in der vorliegenden Arbeit bis zu den Hauptsätzen der Differential- und Integralrechnung führen, die etwa in einer Vorlesung für erste Semester gebracht werden. Im Kapitel III werden einige spezielle Beispiele und Anwendungen diskutiert.

Es ist bemerkenswert, daß sich nicht etwa nur ein Neuaufbau oder eine bloße Modifikation der gewohnten Analysis ergibt, sondern daß diese Analysis hier echt erweitert wird. In welchem Sinne das gilt, wird im einzelnen auszuführen sein. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß wir in Kapitel III, § 2 Funktionen behandeln werden, die die Eigenschaften von DIRACS δ -Funktion haben, und die sich hier ohne Erweiterung des Funktionsbegriffs einführen und auch ohne neue Begriffe behandeln lassen, da die Begriffe der Stetigkeit, Differentiation und Integration auch auf solche Funktionen anwendbar sind, die in unendlich kleinen Intervallen unendlich große Schwankungen ausführen. Auch die Multiplikation derartiger Funktionen verursacht — im Gegensatz zu den Verhältnissen in der Distributionstheorie — hier keine Schwierigkeiten.

Andere Gesichtspunkte, auf die wir hier besonders hinweisen wollen, sind die durchgängige Vertauschbarkeit von Grenzprozessen und die Möglichkeit, alle unendlichen Reihen (auch wenn sie im üblichen Sinne nur bedingt konvergieren) beliebig umzuordnen. Dazu sei auf Kapitel I, § 5 und III, § 4 verwiesen.

Einige historische Bemerkungen dürften nicht überflüssig sein. Seit die Entwicklung der Mathematik der Erfindung der Infinitesimalrechnung zustrebte, spielten unendlich kleine Zahlen eine Rolle in den Diskussionen der Mathematiker. Selbst nach der Umgehung der Schwierigkeiten des Infinitesimalen im 19. Jahrhundert wurden immer wieder Versuche unternommen, eine befriedigende Auffassung des Unendlichkleinen zu finden. Hierher gehören besonders Überlegungen von P. DU BOIS-REYMOND. Einen neuen Anstoß gab auch VERONESES Buch „Grundlagen der Geometrie“, in dem nicht-archimedische Streckenvergleiche untersucht wurde. Im Anschluß daran entwickelten T. LEVI-CIVITA und H. HAHN nicht-archimedische Größensysteme¹⁾. HILBERTS Beispiel einer nicht-archimedischen Geometrie ist bekannt. Ein unpräziser Versuch zur Begründung des Infinitesimalen in der Analysis wurde von K. GEISSLER unternommen²⁾. Inzwischen sind nicht-archimedische Körper seit den Arbeiten von ARTIN, SCHREIER und BAER³⁾ viel untersucht worden, ohne daß man sie in Beziehung zur Analysis gebracht hätte. Eine solche Beziehung scheint zunächst auch tatsächlich ausgeschlossen, weil die Analysis konkrete Begriffsbildungen erfordert, d. h. solche, die sich im Einzelfall durch Rückgriff auf die natürlichen Zahlen herstellen lassen. H. WEYL⁴⁾ hat das folgende Prinzip als Fazit der historischen Entwicklung des Problems der arithmetischen Fixierung der einzelnen Stelle des Kontinuums formuliert: „Objekt der Zahlentheorie sind die einzelnen natürlichen Zahlen, Objekt der Kontinuumslehre die möglichen Mengen (oder die unendlichen Folgen) natürlicher Zahlen“. An einem hierher gehörigen Beispiel erläutert: Es genügt nicht, unendlich große Zahlen zum rationalen Zahlkörper zu adjungieren, so daß man mit den Elementen des neuen Bereichs die rationalen Operationen ausführen kann. Vielmehr muß darüberhinaus noch feststehen, in welcher Weise (etwa als Limes einer bestimmten Folge) jedes Element von den rationalen Zahlen her erzeugt werden kann. Und ferner müssen die neuen Zahlen so beschaffen sein, daß es möglich ist, mit ihrer Hilfe die Analysis aufzubauen;

¹⁾ BOIS-REYMOND, P. DU: Die allgemeine Funktionentheorie. I. Tübingen 1882. — VERONESE, G.: Fondamenti di geometria, Padua 1891; deutsch: Grundzüge der Geometrie. Leipzig 1894. — LEVI-CIVITA, T.: Sugli infiniti ed infinitesimi attuali. Atti R. Istituto Veneto (7) 4, 1765–1815 (1905). — HAHN, H.: Über die nicht-archimedischen Größensysteme. Wiener Ber. 116, 601–655 (1907). — Vorher hat sich schon B. BOLZANO, Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851, (auch Philos. Bibl. Bd. 99) mit der Problematik des Rechnens mit unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen auseinandergesetzt.

²⁾ J.-Ber. DMV. 13 (1904); daselbst auch eine Diskussion mit F. BERNSTEIN u. a.

³⁾ ARTIN, E., u. O. SCHREIER: Algebraische Konstruktion reeller Körper. Hamb. Abh. 5, 85–99 (1926). — BAER, R.: Über nicht-archimedisch geordnete Körper. Sitzsber. Heidelb. 8. Abh., 3–13 (1927).

⁴⁾ WEYL, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, p. 33. 1928.

es müssen sich z. B. unendlich kleine Zahlen zu endlichen aufsummieren lassen können, man braucht also Summen, bei denen eine oder beide Grenzen unendlich große „ganze“ Zahlen sind.

Für diejenigen Leser, die schnell zu den Anwendungsbeispielen (Kap. III) kommen wollen, haben wir im Anschluß an Kapitel I die Bezeichnungen kurz zusammengefaßt. Es genügt, von gelegentlichen Rückverweisen abgesehen, die beiden ersten Paragraphen des Kapitels I zu lesen, um einen Zugang zu den beiden folgenden Kapiteln zu haben.

Kapitel I. Grundlegung des Zahlbegriffs

§ 1. Definition der Ω -rationalen Zahlen als Limites rationaler Zahlfolgen

Wir betrachten Folgen a_Ω von rationalen Zahlen (a_n) ($n=1, 2, 3 \dots$). Wir sagen, die Folge (a_n) habe den *Limes* a_Ω und bezeichnen a_Ω als Ω -rationale Zahl oder kürzer als Ω -Zahl⁵⁾. Die Folge (a_n) heißt die *definierende Folge* oder die *Komponentenfolge* von a_Ω , die einzelnen Glieder der definierenden Folge heißen *Komponenten* von a_Ω . Es ist zweckmäßig, die folgende Konvention einzuführen: Falls die Folge (a_n) durch einen expliziten Ausdruck irgendeiner Art gegeben ist, so bezeichnen wir oft (wenn dadurch keine Mißverständnisse zu befürchten sind) die durch die Folge definierte Ω -Zahl a_Ω durch denselben expliziten Ausdruck, in dem die Unbestimmte n durch das Symbol Ω ersetzt wird. Zum Beispiel soll die Folge (n) die Ω -Zahl Ω definieren, die Folge (n^{-1}) die Ω -Zahl Ω^{-1} , die Folge (n^n) die Ω -Zahl Ω^Ω , die Folge $(-1)^n$ die Ω -Zahl $(-1)^\Omega$. Wir schreiben auch

$$a_\Omega = \lim_{n=\Omega} a_n$$

(a_Ω ist Limes für $n=\Omega$ der Folge a_n).

Wir definieren:

$$\begin{aligned} a_\Omega &= b_\Omega, & \text{wenn} & & a_n &= b_n & \text{für alle natürlichen Zahlen } n. \\ a_\Omega + b_\Omega &= c_\Omega, & \text{wenn} & & a_n + b_n &= c_n & \text{für alle } n; \end{aligned}$$

ebenso werden Subtraktion, Multiplikation und Division komponentenweise erklärt. Dabei ist die Division offenbar dann und nur dann erklärt, wenn jede Komponente des Nenners von 0 verschieden ist. Die Bezeichnungen für die elementaren Rechenoperationen ordnen sich unserer Bezeichnungskonvention unter.

Die Ω -Zahlen bilden einen kommutativen Ring mit Einselement, der aber Nullteiler enthält und also jedenfalls kein Körper ist: Ist $a_n=1$ für gerade n , $a_n=0$ für ungerade n , $b_n=0$ für gerade n , $b_n=1$ für ungerade n , so gilt für

⁵⁾ a_Ω kann also aufgefaßt werden als neue Bezeichnung für die Folge (a_n) . Doch legen wir Wert darauf, daß man a_Ω als eine Zahl (eines neuen Typs) ansieht. Unser Vorgehen ist in dieser Hinsicht nicht verschieden von der üblichen Auffassung, nach der gewisse Klassen von rationalen Zahlfolgen als neue Zahlen eingeführt werden.

die dadurch definierten Ω -Zahlen $a_\Omega \cdot b_\Omega = 0$, ohne daß einer der beiden Faktoren gleich 0 wäre⁶⁾.

Die Nullteiler lassen sich offensichtlich durch eine einfache Eigenschaft ihrer Komponentenfolgen kennzeichnen:

Eine Ω -Zahl a_Ω ist dann und nur dann Nullteiler, wenn die Komponentenfolge (a_n) mindestens eine 0 enthält.

Aus dieser Bemerkung folgt sofort, daß der Ring der Ω -Zahlen ein Quotientenring ist: man kann durch jeden Nicht-Nullteiler dividieren.

Eine Ω -Zahl heiße ganz, wenn jede ihrer Komponenten ganzrational ist. Die ganzen Zahlen bilden wieder einen Ring mit Nullteilern. Es ist leicht zu sehen, daß jede Ω -rationale Zahl Quotient zweier ganzer Ω -Zahlen ist, wobei die Komponenten des Nenners als natürliche Zahlen angenommen werden können.

Wir wollen jetzt noch eine Klasse von Ω -Zahlen ausführlicher behandeln, die in den Anwendungen eine besonders wichtige Rolle spielt, da die meisten in konkreten Fragestellungen auftretenden Zahlen zu dieser Klasse gehören. Wir wollen eine Ω -Zahl *quasirational* nennen, wenn sie sich durch endlich viele rationale Operationen $(+, -, \cdot, :)$ und „quasirationale“ Operationen Σ, Π aus 1 und Ω herstellen läßt. Dabei ist der Gebrauch der Zeichen Σ und Π in der folgenden Weise erklärt:

$$\sum_{v=g_\Omega}^{h_\Omega} f_{\Omega,v} \quad \text{bzw.} \quad \prod_{v=g_\Omega}^{h_\Omega} f_{\Omega,v} \quad (g_\Omega, h_\Omega \text{ ganz; } g_n \leq h_n)$$

sind diejenigen Ω -Zahlen, deren Komponentenfolgen sind

$$\sum_{v=g_n}^{h_n} f_{n,v} \quad \text{bzw.} \quad \prod_{v=g_n}^{h_n} f_{n,v}.$$

Offenbar sind die folgenden Ω -Zahlen quasirational:

$$\left(1 + \frac{1}{\Omega}\right)^\Omega = \prod_{v=1}^{\Omega} \left(1 + \frac{1}{\Omega}\right); \quad \sum_{v=0}^{\Omega} \frac{1}{v!}; \quad \sum_{v=1}^{\Omega} \frac{(-1)^v}{v}.$$

§ 2. Ordnungsbeziehungen

Die Größer-Beziehung im Körper der rationalen Zahlen (dem Komponentenkrper) gibt Veranlassung zu entsprechenden Begriffsbildungen für die Ω -Zahlen selbst. Es ist zweckmäßig, mehrere voneinander geringfügig verschiedene Ordnungsbeziehungen für Ω -Zahlen einzuführen. Wir erklären zunächst jeweils die Positivität oder die ihr entsprechende Eigenschaft.

Die stärkste mögliche Forderung in dieser Richtung ist offenbar:

Definition. Eine Ω -Zahl a_Ω heiße *positiv*, $a_\Omega > 0$, wenn jede Komponente a_n positiv ist.

⁶⁾ Der Ring der Ω -Zahlen enthält einen zum Körper der rationalen Zahlen isomorphen Unterring, wenn der konstanten Folge $a_n = a$ die rationale Zahl a als Limes (für $n = \Omega$) zugeordnet wird.

Eine schwächere Relation ist die folgende:

Definition. Eine Ω -Zahl a_Ω heiße schwach positiv, wenn schließlich alle Komponenten positiv sind; wir schreiben $a_\Omega \succ 0$.

(Die öfter zu verwendende Bezeichnung „schließlich für alle Komponenten“ bedeutet: Für alle Komponenten mit Indizes $n > N$ für irgendeine, von der Zahl a_Ω abhängige natürliche Zahl N .)

Es sei sogleich bemerkt, daß wie im Falle der Positivität zu jeder von den rationalen Zahlen auf die Ω -Zahlen übertragenen Relation die entsprechende „schwache“ Relation gehört, bei der die definierende Forderung nur jeweils schließlich erfüllt zu sein braucht. Wir werden darauf im folgenden nicht immer ausdrücklich einzugehen brauchen und wollen jetzt schon bemerken, daß wir die schwache Relation jeweils durch einen Punkt unter dem Relationszeichen kennzeichnen wollen. Um ein einfaches und auch wichtiges Beispiel zu betrachten, wollen wir kurz die schwache Gleichheit untersuchen: $a_\Omega \doteq b_\Omega$, wenn schließlich alle Komponenten gleich sind. Diese Relation ist, wie man leicht nachprüft, eine Äquivalenzrelation. Bezeichnet man alle Zahlen, deren Komponenten schließlich gleich 0 sind, als Nullzahlen, so gilt: Zwei Zahlen sind dann und nur dann schwach gleich, wenn ihre Differenz eine Nullzahl ist.

Aus der Positivität und der schwachen Positivität ergeben sich naheliegende Erklärungen für die Beziehungen „größer“ und „schwach größer“:

Definition. $a_\Omega > b_\Omega$, wenn $a_\Omega - b_\Omega > 0$. (Wir schreiben dann auch $b_\Omega < a_\Omega$.)

$a_\Omega \succ b_\Omega$, wenn $a_\Omega - b_\Omega \succ 0$. (Wir schreiben dann auch $b_\Omega \prec a_\Omega$.)

Beide Relationen sind transitiv und gehen für rationale Zahlen in die übliche Größer-Beziehung über. Es darf dem Leser überlassen bleiben, zu zeigen, daß Verträglichkeit beider Anordnungsbeziehungen mit der Ringstruktur vorliegt. Dies gilt auch für die folgende Relation „Größer-gleich“, welche sich ebenfalls mittels der Anordnung der rationalen Zahlen einführen läßt:

Definition: $a_\Omega \geq b_\Omega$ (a_Ω größer-gleich b_Ω), wenn a_n größer oder gleich b_n für alle Komponenten (entsprechend für $a_\Omega \geq b_\Omega$: ... schließlich für alle Komponenten).

Wir weisen darauf hin, daß aus der Gültigkeit der Relation $a_\Omega \geq b_\Omega$ nicht zu folgen braucht, daß a_Ω entweder größer oder gleich b_Ω sei. Die Relation ist deshalb mit „größer-gleich“ und nicht mit „größer oder gleich“ zu bezeichnen.

Von je zwei rationalen Zahlen ist stets die eine größer als die andere, falls nicht beide gleich sind. Für Ω -Zahlen gilt diese totale Ordnung nicht: Die Ω -Zahl $(-1)^\Omega$ ist weder gleich 0 noch kleiner oder größer als 0; für dieses Zahlenpaar gilt nicht einmal eine der schwächeren Relationen $\succ$, $\geq$, $\supseteq$. Dieses Fehlen einer totalen Ordnung liegt natürlich daran, daß wir hier zunächst allen Folgen Grenzwerte zugeordnet haben. Später werden wir auch

Untermengen der Menge der Ω -Zahlen untersuchen, die vermöge einer geeigneten Relation totalgeordnet sind.

Jeder Ω -Zahl a_Ω kann man eine zweite, ihren *absoluten Betrag* $|a_\Omega|$, zuordnen, deren Komponenten die absoluten Beträge $|a_n|$ der Komponenten a_n sind. Es gilt offenbar stets $|a_\Omega| \geq 0$. Ist für eine Ω -Zahl a_Ω sogar $|a_\Omega| > 0$, so sagen wir, die Ω -Zahl a_Ω liege entfernt von 0. Zwei Zahlen mögen *entfernt voneinander gelegen* heißen (in Zeichen $a_\Omega \neq b_\Omega$), wenn ihre Differenz entfernt von 0 liegt. Nach dem in § 1 angegebenen Kriterium für Nullteiler haben wir:

Eine Zahl liegt dann und nur dann entfernt von 0, wenn sie von 0 verschieden und kein Nullteiler ist.

Es mag nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, daß es zu je zwei Ω -Zahlen a_Ω und b_Ω eine weitere, c_Ω , gibt, welche von keiner der beiden entfernt liegt. Man definiere c_Ω durch die Komponentenfolge $c_{2n-1} = a_{2n-1}$, $c_{2n} = b_{2n}$.

§ 3. Größenordnung

Die Zahl Ω hat die folgende Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl N gilt $\Omega \succ N$. Es gibt also keine natürliche Zahl, die (schwach) größer wäre als Ω . Im Ring der Ω -Zahlen gilt das *archimedische Axiom in der üblichen Form also nicht*, dieser Ring ist nicht-archimedisch; einen das archimedische Axiom ersetzenden Sachverhalt werden wir sogleich kennenlernen. Zunächst wollen wir verabreden, daß Zahlen, die (wie Ω) von den natürlichen Zahlen her unerreichtbar sind, „*unendlich groß*“ heißen sollen:

Definition. Die Ω -Zahl a_Ω heißt *unendlich groß*, wenn für jede natürliche Zahl N gilt $a_\Omega \succ N$.

Und entsprechend:

Definition. Eine Ω -Zahl a_Ω heißt *unendlich klein* (oder *infinitesimal*), wenn für jede natürliche Zahl N gilt $|a_\Omega| < \frac{1}{N}$.

Den angekündigten Ersatz für das archimedische Postulat bildet der folgende Satz:

Zu je zwei positiven Ω -Zahlen a_Ω, b_Ω existiert eine positive ganze Ω -Zahl N_Ω mit $N_\Omega a_\Omega > b_\Omega$.

Beweis. Die Komponenten N_n werden so bestimmt, daß $N_n a_n > b_n$. Dabei wird also ausgenützt, daß die rationalen Zahlen archimedisch angeordnet sind.

Wir kommen jetzt zur Definition von Größenordnungsbeziehungen, durch welche sowohl im Unendlichgroßen als auch im Infinitesimalen verschiedene, relativ zueinander wiederum unendlich große bzw. unendlich kleine Bezirke angebbar werden.

Definition. Es seien zwei Ω -Zahlen $a_\Omega \geq 0, b_\Omega \geq 0$ gegeben. Dann heißt a_Ω *relativ unendlich groß gegen* $b_\Omega, a_\Omega \gg b_\Omega$, (oder auch b_Ω *relativ unendlich klein gegen* $a_\Omega, b_\Omega \ll a_\Omega$) wenn $a_\Omega \geq N \cdot b_\Omega$ für jede natürliche Zahl N .

Für von 0 entfernt gelegene Zahlen kann noch eine andere Relation erklärt werden:

Definition. Sind a_Ω, b_Ω zwei (nicht notwendig schwach positive) Ω -Zahlen mit $a_\Omega \neq 0, b_\Omega \neq 0$, so heißen a_Ω und b_Ω von gleicher Größenordnung, $a_\Omega \sim b_\Omega$, wenn der Quotient a_n/b_n schließlich zwischen festen positiven rationalen Schranken liegt.

Es lassen sich sofort einige einfache Folgerungen ziehen, deren naheliegende Beweise wir dem Leser überlassen dürfen.

1. Jede der drei Relationen $a_\Omega \gg b_\Omega, a_\Omega \sim b_\Omega, a_\Omega \ll b_\Omega$ schließt jede andere aus. Zwischen zwei Ω -Zahlen besteht höchstens eine der drei Beziehungen $\gg, \sim, \ll$. Es gibt Beispiele, für die keine der drei Relationen erfüllt ist: $a_\Omega = 1, b_\Omega = 1 + \Omega(1 + (-1)^\Omega)$.

2. Die Relationen sind mit der algebraischen Struktur des Ringes verträglich. Wir erwähnen einige leicht zu beweisende Regeln der Kürze halber nur für den Fall, daß alle auftretenden Ω -Zahlen positiv sind, obwohl einige der Regeln, wie der Leser selbst bemerken wird, auch allgemeiner gelten.

$a_\Omega \sim b_\Omega$ ist eine Äquivalenzrelation; die Klassen heißen Größenordnungen.

Aus $a_\Omega \sim b_\Omega$ folgt $1/a_\Omega \sim 1/b_\Omega$. — Aus $a_\Omega \sim b_\Omega, a'_\Omega \sim b'_\Omega$ folgen $a_\Omega + a'_\Omega \sim b_\Omega + b'_\Omega$ und $a_\Omega \cdot a'_\Omega \sim b_\Omega \cdot b'_\Omega$.

Zu jeder (positiven) Ω -Zahl a_Ω gibt es (positive) Ω -Zahlen a'_Ω bzw. a''_Ω , welche relativ unendlich groß bzw. relativ unendlich klein gegen a_Ω sind. (Man setze etwa $a'_\Omega = \Omega \cdot a_\Omega, a''_\Omega = \omega \cdot a_\Omega$ mit $\omega = 1/\Omega$). Eine Nullzahl ist relativ unendlich klein gegen jede positive Ω -Zahl. (Die Nullzahlen können also als absolut unendlich klein bezeichnet werden.)

Aus $a_\Omega \gg a'_\Omega, b_\Omega \geq b'_\Omega$ (oder statt dessen $b_\Omega \sim b'_\Omega$) folgt $a_\Omega \cdot b_\Omega \gg a'_\Omega \cdot b'_\Omega$.

Weitere Regeln überlegt man ebenso einfach; es ist jedoch unnötig, hier mehr als die angegebenen Beispiele aufzuweisen, da man in jedem Fall durch Rückgang auf die Definitionen über die Größenbeziehungen entscheiden kann.

Zur Bezeichnungsweise ist noch zu bemerken, daß $\gg$ eigentlich als eine „schwache“ Relation durch $\ggg$ bezeichnet werden müßte. Da die entsprechende starke Relation keine Rolle spielt, lassen wir der Einfachheit halber den Punkt weg.

Die Relation $\gg$ gibt Veranlassung zur Einführung einer für das Spätere wichtigen Relation:

Definition. Zwei Ω -Zahlen heißen von gleicher Größe (nicht zu verwechseln mit Größenordnung), wenn ihre Differenz, absolut genommen, relativ unendlich klein gegen den Absolutbetrag der ersten von ihnen ist:

$$a_\Omega \approx b_\Omega, \quad \text{wenn} \quad |a_\Omega - b_\Omega| \ll |a_\Omega|.$$

Wir beweisen nun zunächst, daß die damit eingeführte Relation eine Äquivalenzrelation ist; die zugehörigen Äquivalenzklassen wollen wir als „Größen“ bezeichnen.

Trivialerweise gilt $x_\Omega \approx x_\Omega$ für jede Ω -Zahl x_Ω . Als nächstes ist zu zeigen, daß aus $x_\Omega \approx y_\Omega$ folgt $y_\Omega \approx x_\Omega$. Es ist also vorausgesetzt

$$|x_N - y_N| \leq \frac{1}{n+1} |x_N| \quad \text{für } N \geq N(n),$$

und somit folgt

$$|x_N - y_N| \leq \frac{1}{n+1} |x_N| \leq \frac{1}{n+1} |y_N| + \frac{1}{n+1} |x_N - y_N|,$$

also

$$|x_N - y_N| \leq \frac{1}{n} |y_N| \quad \text{für } N \geq N(n),$$

d.h. $|x_\Omega - y_\Omega| \ll |y_\Omega|$ oder, wie behauptet, $y_\Omega \approx x_\Omega$.

Schließlich ist noch die Transitivität der Relation $\approx$ zu beweisen; es gelte sowohl $x_\Omega \approx y_\Omega$ als auch $y_\Omega \approx z_\Omega$. Für $N \geq N'(n)$ gilt dann (unter Benutzung des bereits Bewiesenen)

$$|x_N - y_N| \leq \frac{1}{2n+1} |y_N| \quad \text{und} \quad |y_N - z_N| \leq \frac{1}{2n+1} |y_N|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |x_N - z_N| &\leq |x_N - y_N| + |y_N - z_N| \leq \frac{2}{2n+1} |y_N| \\ &\leq \frac{2}{2n+1} \{|x_N| + |x_N - y_N|\} \leq \frac{2}{2n+1} \left\{ |x_N| + \frac{1}{2n} |x_N| \right\}. \end{aligned}$$

(Die letzte Ungleichung ergibt sich wie im Beweis der Symmetrie der Relation.)

Mithin gilt $|x_N - z_N| \leq \frac{1}{n} |x_N|$ oder tatsächlich $x_\Omega \approx z_\Omega$.

Es ist zu beachten, daß aus $x_\Omega \approx x'_\Omega$, $y_\Omega \approx y'_\Omega$ im allgemeinen nicht folgt $x_\Omega + y_\Omega \approx x'_\Omega + y'_\Omega$, wie man am Beispiel $x_\Omega = 1$, $x'_\Omega = 1 + \omega$, $y_\Omega = y'_\Omega = -1$ sieht. Sind aber die Komponenten aller auftretenden Ω -Zahlen schließlich nicht negativ, d.h. gilt $x_\Omega \geq 0$ usw., so folgt tatsächlich:

Sind die Komponenten von x_Ω , x'_Ω , y_Ω , y'_Ω schließlich nicht negativ und gelten die Beziehungen $x_\Omega \approx x'_\Omega$, $y_\Omega \approx y'_\Omega$, so gilt auch

$$x_\Omega + y_\Omega \approx x'_\Omega + y'_\Omega.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $x_\Omega + y_\Omega \approx x_\Omega + y'_\Omega$:

$$|(x_\Omega + y_\Omega) - (x_\Omega + y'_\Omega)| = |y_\Omega - y'_\Omega| \ll |y_\Omega|,$$

da nach Voraussetzung $y_\Omega \approx y'_\Omega$. Nun gilt aber schließlich $x_N \geq 0$, also $y_N \leq x_N + y_N$, so daß erst recht

$$|(x_\Omega + y_\Omega) - (x_\Omega + y'_\Omega)| \ll |x_\Omega + y_\Omega|, \quad \text{d.h. aber} \quad x_\Omega + y_\Omega \approx x_\Omega + y'_\Omega.$$

Ebenso beweist man, daß $x_\Omega + y'_\Omega \approx x'_\Omega + y'_\Omega$, und aus beidem zusammen folgt die Behauptung.

Korollar: *Das Entsprechende gilt, wenn alle beteiligten Ω -Zahlen schließlich nicht positive Komponenten haben.*

Während also die Addition von Größenklassen nur unter gewissen Zusatzvoraussetzungen möglich ist, hat man für die Multiplikation ohne Einschränkung:

Aus $x_\Omega \approx x'_\Omega$, $y_\Omega \approx y'_\Omega$ folgt $x_\Omega y_\Omega \approx x'_\Omega y'_\Omega$.

Beweis. Wir beweisen als erstes wieder $x_\Omega y_\Omega \approx x_\Omega y'_\Omega$: $|x_\Omega y_\Omega - x_\Omega y'_\Omega| = |x_\Omega| \cdot |y_\Omega - y'_\Omega|$. Nach Voraussetzung ($y_\Omega \approx y'_\Omega$) folgt daraus aber für $N \geq N(n)$

$$|x_N y_N - x_N y'_N| = |x_N| \cdot |y_N - y'_N| \leq \frac{1}{n} |x_N| \cdot |y_N| = \frac{1}{n} |x_N \cdot y_N|,$$

also $x_\Omega y_\Omega \approx x_\Omega y'_\Omega$. Ebenso beweist man $x_\Omega y'_\Omega \approx x'_\Omega y'_\Omega$, woraus wieder wegen der Transitivität der Relation $\approx$ die Behauptung folgt.

Diese beiden Bemerkungen erlauben es, das Produkt und unter gewissen Bedingungen auch die Summe zweier Größenklassen durch die Größenklassen des Produktes bzw. der Summe von Repräsentanten zu erklären.

§ 4. Endliche Zahlen und reelle Zahlklassen

Unter den Größenordnungsklassen spielt eine ausgezeichnete Rolle, nämlich die Klasse, in der die rationalen Zahlen liegen. Die Ω -Zahlen dieser Klasse bezeichnen wir als endliche Zahlen. Sie spielen noch nicht die Rolle der reellen Zahlen der gewöhnlichen Analysis; um zu einer solchen Zahl zu kommen, müssen wir nämlich noch zusätzlich verlangen, daß die endliche Zahl mit den rationalen Zahlen vergleichbar sei; genauer wird definiert:

Definition der reellen Ω -Zahlen.

Eine Ω -rationale Zahl r_Ω heißt reelle Ω -rationale Zahl, wenn folgendes gilt:

a) Es gibt zwei rationale Zahlen q_1 und q_2 so daß

$$q_1 < r_\Omega < q_2;$$

b) Ist r' eine beliebige rationale Zahl, so gilt stets mindestens eine der folgenden drei Beziehungen

$$r' > r_\Omega \quad \text{oder} \quad |r' - r_\Omega| \ll 1 \quad \text{oder} \quad r' < r_\Omega.$$

(Es darf also vorkommen, daß z. B. die zweite und eine der beiden anderen Beziehungen erfüllt sind, wie es für $r_\Omega = \omega$ und $r' = 0$ zutrifft.)

Eine reelle Zahlklasse (nicht „ Ω -Zahl“) oder ausführlicher *Dedekindsche reelle Zahlklasse* ist eine Klasse von reellen Ω -rationalen Zahlen, deren Differenzen unendlich klein sind.

Offenbar sind die so definierten Dedekindschen reellen Zahlklassen tatsächlich identisch mit den in üblicher Weise definierten reellen Zahlen, die als Klassen der definierenden Folgen der Ω -Zahlen aufgefaßt werden können.

Es ist nämlich leicht zu sehen, daß die „Nullfolgen“ der üblichen Analysis umkehrbar eindeutig den Komponentenfolgen der unendlich kleinen Zahlen entsprechen, da eine „Nullfolge“ hier als Limes für $n = \Omega$ eine unendlich kleine Zahl hat und umgekehrt eine unendlich kleine Zahl eine Komponentenfolge

besitzt, die im üblichen Sinne eine „Nullfolge“ ist, wie direkt aus der Definition der unendlich kleinen Zahlen folgt.

Es ist ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß wir damit keineswegs das Dedekindsche Axiom (oder ein dazu äquivalentes) einführen und damit im wesentlichen zur üblichen Analysis kämen. Vielmehr bleiben wir dabei, daß mit Ω -Zahlen und nicht mit Klassen zu rechnen ist. Die Einführung der Dedekindschen reellen Zahlklassen soll nur zwei Zwecken dienen. Einmal wird dadurch ein Vergleich von Ergebnissen der Ω -Analysis mit solchen der gewohnten Analysis ermöglicht; und zum andern ist es gelegentlich zweckmäßig, den Begriff der reellen Zahlklasse zur Hand zu haben, weil er für viele Gesichtspunkte wesentlich ist, unter anderem deswegen, weil die reellen Zahlklassen einen vollgeordneten Körper bilden.

Es ist oft zweckmäßig, reelle Zahlklassen durch geeignete Repräsentanten zu bezeichnen, z. B. die Klasse der unendlich kleinen Zahlen mit 0 usw. Um diese Bezeichnungsweise unmißverständlich durchführen zu können, wollen wir die folgende Äquivalenzrelation einführen: $a_\Omega \cong b_\Omega$ („ a_Ω endlich-gleich b_Ω “), wenn die Differenz unendlich klein ist. Es ist ferner zweckmäßig, das Zeichen $\cong$ auch für die Zugehörigkeit einer Ω -Zahl zu einer reellen Zahlklasse zu verwenden. Zum Beispiel gilt also

$$1 + \omega(-1)^\Omega \cong 1 \quad \left(\omega = \frac{1}{\Omega} \right)$$

(Endlich-Gleichheit zweier Ω -Zahlen); und bezeichnet man etwa die reelle Zahlklasse, in der die reelle Ω -Zahl $(1 + \omega)^\Omega$ liegt, mit dem Buchstaben e , so ist also für die Zugehörigkeit der Zahl zur Klasse e zu schreiben

$$(1 + \omega)^\Omega \cong e.$$

Hier darf nicht das Gleichheitszeichen stehen, weil Gleichheit nur für gleichartige Größen, etwa Zahlen, erklärt ist, während das Zeichen $\cong$ kraft unserer ausdrücklichen Festsetzung auch für die Zugehörigkeit zu einer Klasse steht, im Beispiel also für $(1 + \omega)^\Omega \in e$.

Zur Bezeichnungsweise ist weiter zu bemerken, daß die Größer-Relation zwischen reellen Zahlklassen wie üblich durch das Zeichen $>$ angegeben werden soll. Dies ist sinnvoll, weil zu je zwei reellen Zahlklassen a, b Elemente $a_\Omega \cong a, b_\Omega \cong b$ gefunden werden können, so daß entweder $a_\Omega < b_\Omega$ oder $a_\Omega > b_\Omega$. Es ist aber zu beachten, daß dies nicht für je zwei beliebige Repräsentanten gelten wird. Im allgemeinen muß das Zeichen $>$ beim Übergang zu Repräsentanten durch das Zeichen $\dot{>}$ ersetzt werden:

$$e \dot{>} \frac{5}{2} \quad (\text{für die Klassen}), \text{ aber}$$

$$(1 + \omega)^\Omega \dot{>} \frac{5}{2} \quad (\text{für ein Paar von Repräsentanten}).$$

Aus dieser Bemerkung kann man entnehmen, daß hier im allgemeinen die Relation $\dot{>}$ der Relation $>$ der gewohnten Analysis entsprechen wird. Daß wir daneben auch die stärkere Relation $>$ in der Ω -Analysis benötigen, wird sich schon im nächsten Abschnitt zeigen.

§ 5. Der Begriff des Grenzwerts einer Folge von Ω -Zahlen

Ist jeder natürlichen Zahl p eine Ω -Zahl $a_\Omega^{(p)}$ zugeordnet, so sprechen wir von einer Folge vom Ω -Zahlen. Ebenso kann man Doppelfolgen $a^{(p,q)}$ definieren.

Definition des Grenzwerts einer Folge von Ω -Zahlen.

Sei $a_\Omega^{(p)}$ eine Folge von Ω -Zahlen und sei g_Ω eine unendlich große positive ganze Ω -Zahl; dann definieren wir eine Ω -Zahl

$$\lim_{p=g_\Omega} a_\Omega^{(p)} = a_\Omega^{(g_\Omega)} = b_\Omega$$

dadurch, daß ihre definierende Folge (Komponentenfolge), wie es schon die Bezeichnung angibt, gegeben ist durch

$$b_n = a_n^{(g_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Diese Ω -Zahl heißt der Limes oder Grenzwert der Folge für die unendlich große positive ganze Ω -Zahl g_Ω .

Man beachte, daß g_Ω wirklich (stark) positiv sein muß und daß nicht etwa $g_\Omega > 0$ ausreicht. Denn um die Komponenten des Grenzwerts bilden zu können, müssen alle g_n positive ganze Zahlen sein. Dies ist das am Ende des vorigen Abschnitts angekündigte Beispiel dafür, daß hier gelegentlich auch die stärkere Relation $>$ benötigt wird, während — wie wir dort sahen — es in vielen Fällen auf die Relation $>$ ankommt.

Man kann diese Definition des Limes speziell anwenden auf den Fall, daß die einzelnen Glieder der Folge sämtlich rationale Zahlen sind, also gar nicht von Ω abhängen:

$$a_\Omega^{(p)} = a_p, \quad a_p \text{ rationale Zahl.}$$

Dann ergibt

$$\lim_{p=\Omega} a_\Omega^{(p)} = a_\Omega$$

gerade diejenige Ω -Zahl, deren definierende Folge a_n ist. Die Definition des Grenzwerts verallgemeinert also die in § 1 gegebene Definition der Ω -rationalen Zahlen. Es ist aber bemerkenswert, daß jeder Limes einer Folge von Ω -rationalen Zahlen wieder eine Ω -rationale Zahl ist.

Zu jeder Ω -Zahl gehören nun aber auch noch weitere Ω -Zahlen, die durch die Limites der Komponentenfolge von Ω für unendlich große positive ganze Ω -Zahlen gegeben sind. Das Verhältnis der Ω -Zahl a_Ω zu den mit ihr auf diese Weise verknüpften Ω -Zahlen a_{g_Ω} erläutert in einem speziellen, besonders wichtigen Fall der folgende Satz, der zugleich eine Motivation für die Bezeichnung „Grenzwert“ liefert:

Hauptsatz über reelle Zahlklassen.

Wenn $\lim_{p=\Omega} a^{(p)} \cong r$ (r eine reelle Zahlklasse), so gilt

$$\lim_{p=g_\Omega} a^{(p)} \cong r$$

für jede unendlich große positive ganze Ω -Zahl g_Ω .

Beweis. Die Voraussetzung, daß $r \cong a^{(\Omega)}$ eine reelle Zahlklasse sei, bedeutet nach Definition: Zu jeder rationalen Zahl ϱ steht fest, welche der drei Relationen

$$r < \varrho, \quad r \cong \varrho, \quad r > \varrho$$

gilt, und mindestens eine von ihnen ist wirklich erfüllt. Betrachten wir etwa das Kleiner-Zeichen; es gelte also

$$a^{(\Omega)} < \varrho.$$

Dies heißt nach Definition: Es gibt ein N_0 , so daß für $n \geq N_0$ gilt $a^{(n)} < \varrho$. Andererseits gibt es, weil g_Ω unendlich groß ist, ein N_1 (welches von N_0 abhängen darf) so, daß $g_n > N_0$ für $n \geq N_1$. Daher hat man für $n > N_2 = \text{Max}(N_0, N_1)$:

$$a^{(g_n)} < \varrho,$$

also $a^{(g_\Omega)} < \varrho$. Ebenso verläuft die Argumentation für $>$ anstelle von $<$. Mit hin liegt $a^{(g_\Omega)}$ zwischen den gleichen rationalen Schranken wie $a^{(\Omega)}$. Das bedeutet für reelles $a^{(\Omega)}$, daß $a^{(g_\Omega)}$ in die gleiche reelle Zahlklasse fällt, was zu beweisen war.

Aus dem Beweis folgt übrigens noch etwas mehr: Man kann z.B. genauso schließen, daß aus $a_\Omega > \varrho$ für eine rationale Zahl ϱ folgt $a_{g_\Omega} > \varrho$ für alle unendlich großen ganzen positiven g_Ω ; ist also a_Ω unendlich groß, so auch a_{g_Ω} .

Dieser *Hauptsatz über reelle Zahlklassen* hängt übrigens eng mit dem Satz der gewohnten Analysis zusammen, nach dem jede unendliche Teilfolge einer Cauchy-konvergenten Folge ebenfalls konvergiert und den gleichen Grenzwert (im gewohnten Sinne) hat.

Sei nun $a_\Omega^{(p, q)}$ eine Doppelfolge von Ω -Zahlen, so daß also für jedes feste p bzw. q eine Folge von Ω -Zahlen mit laufendem Index q bzw. p vorliegt, und seien g_Ω und h_Ω zwei nicht notwendig verschiedene unendlich große positive ganze Ω -Zahlen. Dann kann man bilden

$$\lim_{p=g_\Omega} a_\Omega^{(p, q)} = b_\Omega^{(q)} = a_\Omega^{(g_\Omega, q)}$$

für jedes feste q , und anschließend

$$\lim_{q=h_\Omega} b_\Omega^{(q)} = b_\Omega^{(h_\Omega)} = a_\Omega^{(g_\Omega, h_\Omega)}.$$

Man erhält nach diesem doppelten Grenzübergang also diejenige Ω -Zahl $a_\Omega^{(g_\Omega, h_\Omega)}$, deren Komponenten durch $a_n^{(g_n, h_n)}$ gegeben sind. Die gleiche Ω -Zahl erhält man aber offenbar auch, wenn man zunächst den Grenzübergang $q = h_\Omega$ und anschließend den Grenzübergang $p = g_\Omega$ ausführt:

Das Ergebnis zweier Grenzübergänge ist von der Reihenfolge ihrer Ausführung unabhängig. Die Reihenfolge von Grenzübergängen ist vertauschbar.

Es ist nötig, einige Worte über den Unterschied des hier eingeführten Limesbegriffs zu dem der üblichen Analysis zu sagen. In unserem Aufbau hat jede Folge von Ω -Zahlen für jede beliebige unendlich große positive ganze

Ω -Zahl einen Grenzwert. Dadurch werden auch solchen Folgen Grenzwerte zugeordnet, die nach der üblichen Analysis divergieren. Dies hat den Vorteil, daß man sich im Verlauf einer Rechnung nicht um Konvergenzbeweise zu kümmern braucht, sondern erst das Endergebnis daraufhin zu prüfen hat, ob es in eine reelle Zahlklasse fällt (falls diese Tatsache im speziellen Fall überhaupt interessiert). Andererseits wird der Grenzwert im allgemeinen explizit von der Grenze abhängen; allerdings ist nach dem Hauptsatz sicher, daß alle Grenzwerte in dieselbe reelle Zahlklasse fallen, sobald die definierende rationale Zahlfolge im üblichen Sinne CAUCHY-konvergent ist, und daß diese Limesklasse mit dem Grenzwert der Folge (im üblichen Sinne genommen) der Einordnung in die rationalen Zahlen nach übereinstimmt. Das sichert die Übereinstimmung der hier vorgeschlagenen Analysis mit den Ergebnissen der üblichen Analysis in den Fällen, in denen beide anwendbar sind.

Dem scheint zunächst zu widersprechen, daß hier die Reihenfolge von Grenzübergängen stets vertauschbar ist, was in der üblichen Analysis ja nicht zutrifft. Wir diskutieren dazu zunächst als ein ganz einfaches Beispiel die Doppelfolge von rationalen Zahlen

$$a^{(p,q)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{q}},$$

für die in der üblichen Analysis gilt:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} a^{(p,q)} = 0, \quad \text{aber} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} a^{(p,q)} = 1.$$

Bei uns gilt hingegen (natürlich unabhängig von der Reihenfolge)

$$\lim_{\substack{p=g_\Omega \\ q=h_\Omega}} a^{(p,q)} = \frac{1}{1 + \frac{g_\Omega}{h_\Omega}}.$$

Wir wollen das Ergebnis der gewohnten Analysis von unserem Standpunkt interpretieren. Führt man zunächst den Grenzübergang $p = g_\Omega$ (entsprechend $p \rightarrow \infty$) aus, so ergibt sich

$$\frac{1}{1 + \frac{g_\Omega}{q}}$$

also für jedes endliche $q = 1, 2, 3, \dots$ eine unendlich kleine Zahl. Man kann nun sagen, daß die gewohnte Analysis diese unendlich kleine Zahl durch einen anderen Repräsentanten derselben Zahlklasse, nämlich durch 0, ersetzt, so daß sich dann beim zweiten Grenzübergang natürlich 0 ergibt. Bei uns ist es unstatthaft, im Verlaufe einer Rechnung zu anderen Repräsentanten überzugehen, und daher ist es möglich, daß eine Folge von unendlich kleinen Zahlen (wie hier im Beispiel) zu einem endlichen Grenzwert führt. Das Ergebnis der gewohnten Analysis kann aber bei uns jederzeit reproduziert werden. Soll etwa $p \rightarrow \infty$ zuerst ausgeführt werden, so setze man voraus $g_\Omega \gg h_\Omega$; dann erhält man einen Grenzwert, der in die Klasse fällt, die durch den Grenzwert der üblichen Analysis gegeben ist. Man verliert also auch hier nichts gegen-

über der gewohnten Analysis, gewinnt aber den Vorteil, daß man sich im Verlauf einer Rechnung keine Gedanken über die Vertauschbarkeit einer Reihenfolge von Grenzübergängen zu machen braucht; ist das Endergebnis eine reelle Zahl, so ist nach dem Hauptsatz deren Klasse insofern unabhängig von der speziellen Wahl der unendlich großen Grenzen, als Ω durch irgendeine andere unendlich große ganze positive Ω -Zahl ersetzt werden darf.

Zum Hauptsatz ist noch zu bemerken, daß es wesentlich ist, vorauszusetzen, der Limes für Ω falle in eine reelle Zahlklasse, um folgern zu können, daß alle Limites in die gleiche Klasse fallen. Es gilt im allgemeinen nicht, daß dafür schon genügt, der Limes für irgendeine (von Ω verschiedene) unendlich große positive ganze Ω -Zahl sei reell. Dies sieht man am Beispiel der Folge $a_n = (-1)^n$: Deren Limes für die Zahl 2Ω ist reell, und zwar gleich 1, doch der Limes für $n = \Omega$ ist nicht reell.

Weitere, interessantere Beispiele zur Vertauschbarkeit von Grenzprozessen werden später gegeben werden.

Wichtige Beispiele für Folgen werden durch die bereits früher eingeführten unendlichen Summen und Produkte geliefert. Nach dem Hauptsatz ist wiederum klar, daß jede unendliche Summe (ebenso jedes Produkt), welche auch nach der gewohnten Analysis konvergiert, hier eine reelle Zahl aus der entsprechenden Klasse liefert. Es ist aber zu bemerken, daß hier auch solche Ausdrücke einen Sinn haben, die gemäß der gewohnten Analysis divergieren, und daß mit ihnen gerechnet werden darf. Dadurch ist es z. B. möglich, mit „divergenten“ Reihen so zu rechnen, wie es noch bis zu EULERS Zeit üblich war. Wir geben nur das einfachste und bekannteste Beispiel von BERNOULLI an: Die Gleichung

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p(p+1)} = 1$$

kann man nach einem Ansatz von BERNOULLI so beweisen:

$$\sum_{p=1}^{\Omega} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \sum_{p=1}^{\Omega} \frac{1}{p} - \sum_{p=2}^{\Omega+1} \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{\Omega+1}.$$

Also gilt die behauptete Gleichung, und zwar nach dem Hauptsatz unabhängig von der oberen Grenze.

Zwei Abkürzungen, die sich nach der Bezeichnungskonvention aus § 1 fast von selbst verstehen, seien noch ausdrücklich eingeführt. Produkte mit lauter gleichen Faktoren schreiben wir als Potenzen:

$$\prod_{p=1}^{g\Omega} a_{\Omega} = a_{\Omega}^{g\Omega} \quad (g \geq 1).$$

Für die Produkte

$$\prod_{p=1}^{g\Omega} p \quad (g \geq 1)$$

schreiben wir kurz $g_{\Omega}!$ (Fakultät).

Nach der Einführung des Grenzwertbegriffs wird nun auch ersichtlich, aus welchem Grunde die (starke) Gleichheit ($=$) der schwachen Relation ($\doteq$) vorzuziehen ist. Betrachten wir dazu als Beispiel die Doppelfolge

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$a_n = \delta_{\Omega n} \doteq 0 \quad \text{für jedes } n$$

$$b_m = \delta_{m\Omega} \doteq 0 \quad \text{für jedes } m,$$

aber

$$\lim_{n=\Omega} a_n = \lim_{m=\Omega} b_m = \delta_{\Omega\Omega} = 1.$$

Wollte man also Limesprozesse für „schwache“ Gleichungen vornehmen, so würde dies zu unvernünftigen Folgerungen führen, da aus $a_n \doteq 0$ für jedes n nicht geschlossen werden kann $a_\Omega \doteq 0$; im Beispiel $a_n = \delta_{\Omega n}$ ergibt sich sogar $a_\Omega = 1$. Diese Vorkommnisse werden vermieden, wenn man in allen Überlegungen, in die Grenzübergänge eingehen, die starke Gleichheit verwendet. Im Beispiel: $a_n = \delta_{\Omega n}$ ist nicht stark gleich 0. Außerdem ergibt sich, wie wir sahen, für die starke Gleichheit zusätzlich die Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Grenzübergängen, die für die schwache Gleichheit natürlich nicht gilt, wie man auch aus dem Beispiel ablesen kann.

Andererseits ist es für das Endergebnis einer Rechnung gewöhnlich unwesentlich, ob schwache oder starke Gleichheit gilt, so daß man — wenn dies eine Vereinfachung bedeutet — dann oft zu einer dem erhaltenen Ergebnis schwach gleichen Ω -Zahl übergehen kann. Ein solcher Übergang ist oft bei Anordnungsbeziehungen ($\succ$, $\prec$) unwesentlich, da er nur die Addition einer Nullzahl bedeutet, d. h. einer Zahl, deren sämtliche Komponenten schließlich 0 sind.

§ 6. Bemerkungen über eine mögliche Erweiterung

Wir haben gesehen, daß jeder reellen Zahl der gewohnten Analysis hier eine ganze Klasse von Ω -rationalen Zahlen entspricht. Es gibt aber beispielsweise keine Ω -rationale Zahl, deren Quadrat gleich zwei wäre (denn gäbe es eine solche Ω -Zahl, so müßte für jede ihrer rationalen Komponenten gelten, daß ihr Quadrat gleich 2 ist, was unmöglich ist). Allerdings kann man zeigen, daß es zu jedem beliebigen positiven ε_Ω eine Ω -rationale Zahl gibt, deren Quadrat von 2, absolut genommen, um weniger als ε_Ω verschieden ist. Dies reicht für alle praktischen Zwecke sicher aus, und da man sehr einfach überlegen kann, daß entsprechendes z. B. für alle algebraischen Zahlen gilt, darf man mit diesem Sachverhalt im Hinblick auf die Einfachheit des Aufbaus des Zahlensystems wohl zufrieden sein. Tatsächlich soll die vorliegende Arbeit auch gerade zeigen, daß man durch diese Approximation mit beliebiger unendlich kleiner Genauigkeit einen befriedigenden Aufbau der Analysis erhält, der gewisse Mängel der üblichen Analysis vermeidet. Die folgenden

Bemerkungen sind daher für das Verständnis des Nachfolgenden nicht erforderlich, sie dienen nur der begrifflichen Abrundung.

Wir wollen versuchen, den Ring der Ω -Zahlen so zu erweitern, daß der erweiterte Bereich z. B. auch die algebraischen Zahlen nicht nur mit beliebig unendlich kleiner Genauigkeit, sondern exakt enthält. Dazu bieten sich zwei Wege an.

Die erste Möglichkeit ist, bereits den zugrunde gelegten Komponentenring (der bei den Ω -rationalen Zahlen der Körper der rationalen Zahlen ist) weiter zu wählen. Man kann zeigen, worauf an einer anderen Stelle ausführlicher einzugehen sein wird, daß der Prozeß, der uns zu den Ω -rationalen Zahlen führte, allgemein auf teilgeordnete Ringe mit einem ausgezeichneten Unterring von „ganzen“ Zahlen angewendet werden kann. Geht man etwa vom Körper der algebraischen oder der Dedekind-Cantorsche reellen Zahlen aus, so erhält man auf diese Weise Ringe von „ Ω -algebraischen“ oder „ Ω -reellen“ Zahlen, die den Ring der Ω -Zahlen, aber auch den Körper der reell-algebraischen Zahlen als Unterringe enthalten. Bei der Gelegenheit sei übrigens darauf hingewiesen, daß der Prozeß, der zu den Ω -rationalen Zahlen führte, iteriert werden kann.

Eine andere, ebenfalls interessante Erweiterungsmöglichkeit ergibt sich aus der folgenden Modifikation des Cantorsche Fundamentalfolgenverfahrens. Zunächst wird definiert:

Definition. Ist jeder positiven ganzen Ω -Zahl n_Ω eine Ω -rationale Zahl $x_\Omega^{(n_\Omega)}$ zugeordnet, so daß zu jedem positiven ε_Ω eine ganze Ω -Zahl N_Ω existiert mit

$$|x_\Omega^{(n_\Omega)} - x_\Omega^{(n'_\Omega)}| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad n_\Omega, n'_\Omega > N_\Omega(\varepsilon_\Omega)$$

so heißt diese Zuordnung eine *C-Folge*.

Gibt es eine Ω -rationale Zahl x_Ω , so daß

$$|x_\Omega^{(n_\Omega)} - x_\Omega| < \varepsilon_\Omega$$

für alle $n_\Omega > \bar{N}_\Omega$, so kann man diese Ω -rationale Zahl x_Ω als *Limes* für $n_\Omega \rightarrow \infty$ der *C-Folge* $x_\Omega^{(n_\Omega)}$ bezeichnen. Man zeigt leicht, daß eine *C-Folge* höchstens einen Limes für $n_\Omega \rightarrow \infty$ besitzen kann. Umgekehrt gilt, daß jede Ω -rationale Zahl in trivialer Weise Limes einer *C-Folge* ist. Es gibt aber *C-Folgen*, z. B.

$$x_\Omega^{(n_\Omega)} = \left(1 + \frac{1}{n_\Omega}\right)^{n_\Omega},$$

die keine Ω -rationale Zahl als Limes für $n_\Omega \rightarrow \infty$ besitzen. Nennt man zwei *C-Folgen* $x_\Omega^{(n_\Omega)}$ und $y_\Omega^{(n_\Omega)}$ äquivalent, wenn zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ eine ganze Ω -Zahl N_Ω existiert mit

$$|x_\Omega^{(n_\Omega)} - y_\Omega^{(n_\Omega)}| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad n_\Omega > N_\Omega,$$

so kann man den Ring der Ω -Zahlen erweitern zum Ring der Klassen äquivalenter Fundamentalfolgen. In diesem Ring, in dem nun auch ein Element $\sqrt[2]{2}$ mit $\sqrt[2]{2}^2 = 2$ existiert, konvergiert jede Fundamentalfolge (*C-Folge*). Er enthält außerdem einen zum Körper der Cantor-Dedekindschen reellen Zahlen

isomorphen Unterring. (Um das letztere zu sehen, gehe man folgendermaßen vor: Sei in der gewohnten Analysis $r_n \rightarrow r$, r_n rational, r reell, so setze man $r_\Omega^{(n_\Omega)} = \lim_{n=n_\Omega} r_n$. Dann gilt $\lim_{n_\Omega \rightarrow \infty} r_\Omega^{(n_\Omega)} = r$.)

Der Limesbegriff für $n_\Omega \rightarrow \infty$ teilt mit dem Limesbegriff der gewohnten Analysis dessen Nachteile z.B. im Hinblick auf die Möglichkeit der Nichtvertauschbarkeit von Reihenfolgen bei derartigen Grenzübergängen. Wir werden daher beim Aufbau der Analysis von diesem Grenzwertbegriff keinen Gebrauch machen, sondern uns auf Grenzprozesse $n = g_\Omega$ beschränken und demgemäß auch nur die Ω -rationalen Zahlen verwenden, nicht aber diesen eben erhaltenen Oberring der Klassen von C-Folgen. Dies wird ausreichen, weil dann schon alle Größen bis auf beliebige unendlich kleine Fehler bestimmt sind, was den Bedürfnissen der Anwendungen sicher entspricht.

Bezeichnungen

Gleichheit:

$$a_\Omega = b_\Omega, \text{ wenn } a_n = b_n \text{ für alle natürlichen Zahlen } n = 1, 2, 3, \dots$$

Anordnung:

$$a_\Omega > b_\Omega, \text{ wenn } a_n > b_n \text{ für alle } n$$

$$a_\Omega \geq b_\Omega, \text{ wenn } a_n \geq b_n \text{ für alle } n.$$

Entfernt liegen:

$$a_\Omega \nparallel b_\Omega, \text{ wenn } a_n - b_n \neq 0 \text{ für alle } n.$$

Schwache Relation:

$$a_\Omega R b_\Omega \text{ wenn } a_n R b_n \text{ schließlich für alle } n$$

(R eine zweistellige Relation zwischen rationalen Zahlen).

Absoluter Betrag:

$$a_\Omega = |b_\Omega| \text{ wenn } a_n = |b_n| \text{ für alle } n.$$

Relativ unendlich groß (klein):

$$a_\Omega \gg b_\Omega \quad (b_\Omega \ll a_\Omega)$$

$$\text{wenn } a_\Omega \geq N \cdot b_\Omega \text{ für alle } N = 1, 2, 3, \dots$$

Unendlich große (unendlich kleine oder infinitesimale) Zahlen:

$$a_\Omega \gg 1 \quad (|a_\Omega| \ll 1).$$

Gleiche Größenordnung:

$$a_\Omega \sim b_\Omega \text{ wenn } \frac{1}{N} < \frac{a_\Omega}{b_\Omega} < N$$

für eine natürliche Zahl N und wenn $b_\Omega \nparallel 0$.

Gleiche Größe:

$$a_\Omega \approx b_\Omega \text{ wenn } |a_\Omega - b_\Omega| \ll |a_\Omega|.$$

Endlich-Gleichheit (Gleichheit bis auf unendlich kleinen Fehler):

$$a_\Omega \cong b_\Omega \quad \text{wenn} \quad |a_\Omega - b_\Omega| \ll 1$$

Limes für $n = N_\Omega$:

$$\lim_{n=N_\Omega} a_\Omega^{(n)} = a_\Omega^{(N_\Omega)}$$

mit Komponentenfolge $a_n^{(N_n)}$.

Kapitel II. Anfangsgründe der Analysis

§ 1. Der Funktionsbegriff

Eine *Funktion* $f(x)$ ist eine Abbildung

$$f: D_f \rightarrow P^\Omega$$

einer Untermenge D_f (des Definitionsbereichs) des Ringes P^Ω der Ω -Zahlen in diesen Ring. Beispiele für Funktionen sind alle rationalen Funktionen (mit Ω -rationalen Koeffizienten), wobei der Definitionsbereich genau aus denjenigen Ω -rationalen Zahlen besteht, für die der Nenner kein Nullteiler ist, ferner die Funktionen

$$\bar{e}(x) = \sum_{v=0}^{\Omega} \frac{x^v}{v!} \quad \text{und} \quad e(x) = \left(1 + \frac{x}{\Omega}\right)^\Omega.$$

Weitere wichtige Beispiele sind die Funktionen $f(x) = x^g$ (g eine ganze positive Ω -Zahl).

Die wichtigsten Funktionen gehören einer spezielleren Klasse an. Um sie zu definieren, geben wir zunächst die folgende

Definition. Eine Menge von Ω -rationalen Zahlen heißt normal, wenn mit x_Ω auch die Komponenten x_n zu der Menge gehören.

Die wichtigsten Beispiele von normalen Mengen sind die Intervalle mit rationalen Grenzen: Die Menge der x_Ω mit $a \leq x_\Omega \leq b$ ist offensichtlich normal, ebenso die der x_Ω mit $a < x_\Omega < b$ (a, b in beiden Fällen rational). Normale Mengen sind auch die Intervalle $0 < x_\Omega < \Omega$ und $-\Omega \leq x_\Omega \leq \Omega$.

Definition. Die Funktion $f(x)$ heißt auf der Untermenge M ihres Definitionsbereichs normal (oder kurz eine normale Funktion), wenn

- a) M eine normale Menge ist,
- b) $f(x_\Omega) = \lim_{n=\Omega} f(x_n)$ für jedes $x_\Omega \in M$.

Eine normale Funktion ist also schon dann völlig festgelegt, wenn ihre Werte für die rationalen Zahlen aus M gegeben sind. Alle zu Beginn dieses Abschnitts angegebenen Beispiele von Funktionen sind normale Funktionen auf gewissen normalen Mengen ihrer Definitionsbereiche.

Den Begriff der Stetigkeit einer Funktion erklären wir in folgender Weise:

Definition. Eine Funktion $f(x)$ heißt im Punkte $x = x_\Omega$ ihres Definitionsbereichs stetig, wenn es zu jeder positiven Ω -Zahl ε_Ω eine positive Ω -Zahl $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$

gibt, so daß $|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$ wenn nur x'_Ω ebenfalls zum Definitionsbereich gehört und $|x_\Omega - x'_\Omega| < \delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$. $f(x)$ heißt auf einer normalen Untermenge I des Definitionsbereiches gleichmäßig stetig, wenn sich dort δ_Ω unabhängig von x_Ω wählen läßt.

Satz 1. Es sei $f(x)$ eine auf der normalen Menge I normale Funktion, die auf den rationalen Punkten von I stetig im engeren Sinne sei (d.h. für jedes rationale $x \in I$ gilt: Zu jedem rationalen positiven ε existiert ein rationales positives $\delta(\varepsilon)$ so daß $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für alle rationalen $x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$). Dann ist die Funktion in allen Punkten von I stetig.

(Stetige Fortsetzung einer im engeren Sinne stetigen Funktion.)

Beweis. Es sei $x_\Omega \in I$ und $\varepsilon_\Omega > 0$, x_n und ε_n seien die zugehörigen Komponentenfolgen, so daß also alle x_n zu I gehörige rationale Zahlen sind. Nach Voraussetzung gibt es daher für jedes n positive rationale Zahlen $\delta_n(\varepsilon_n)$ (die zunächst von x_n abhängen dürfen), so daß

$$|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon_n,$$

wenn $x'_n \in I$ rational ist und $|x_n - x'_n| < \delta_n$. Definiert man die Ω -Zahl $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ durch die so gewonnenen Komponenten $\delta_n(\varepsilon_n)$, so gilt tatsächlich: Es ist $|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$, wenn $|x_\Omega - x'_\Omega| < \delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$. Um das zu sehen, wähle man die x'_n als Komponenten der Ω -Zahl x'_Ω .

Als nächstes beweisen wir den Satz von der Stetigkeit der Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen, welcher in der gewohnten Analysis kein ebenso einfaches Analogon besitzt.

Satz 2. Sei I eine normale Menge von Ω -Zahlen, und sei $f_n(x)$ für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$ eine Funktion, die für rationale $x \in I$ rationale Werte habe, auf I normal und stetig (im engeren Sinne) sei (auf I gleichmäßig stetig sei). Definiert man dann auf I eine Funktion $f(x)$ durch

$$f(x_\Omega) = \lim_{n \rightarrow \Omega} f_n(x_n)$$

so gilt:

$f(x)$ ist in jedem Punkte von I stetig (auf I gleichmäßig stetig).

Beweis. Wir führen den Beweis hier für die eingeklammerte Behauptung; für den anderen Teil der Behauptung verläuft der Beweis entsprechend. Es gilt also nach Voraussetzung für jedes n :

Zu jedem rationalen $\varepsilon_n > 0$ gibt es ein rationales $\delta^{(n)}(\varepsilon_n) > 0$ mit

$$|f_n(x_n) - f_n(x'_n)| < \varepsilon_n$$

wenn die rationalen Zahlen

$$x_n, x'_n \in I \quad \text{und} \quad |x_n - x'_n| < \delta^{(n)}(\varepsilon_n).$$

Nun wähle man ein beliebiges positives Ω -rationales ε_Ω , dessen rationale Komponenten ε_n seien. Damit gilt

$$|f_n(x_n) - f_n(x'_n)| < \varepsilon_n \quad \text{für} \quad |x_n - x'_n| < \delta^{(n)}(\varepsilon_n)$$

also, da dies für alle n gilt:

$$|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad |x_\Omega - x'_\Omega| < \delta^{(\Omega)}(\varepsilon_\Omega)$$

wo $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ die Komponenten $\delta^{(n)}(\varepsilon_n)$ hat. Da alle diese Komponenten positiv sind, ist $d^{(\Omega)}(\varepsilon_\Omega) > 0$. Damit ist der Beweis beendet.

Man sieht, daß sich der Beweis deswegen durchführen läßt, weil hier (im Unterschied zur gewohnten Analysis) der Limes (für $n = \Omega$) einer Folge positiver Ω -Zahlen stets wieder positiv ist. Um sich ein anschauliches Bild von den Verhältnissen zu machen, betrachte man ein einfaches Beispiel einer Folge von stetigen Funktionen, deren Grenzfunktion im Sinne der gewohnten Analysis nicht stetig ist, nämlich die Folge der Funktionen x^n im Intervall $0 \leq x_\Omega \leq 1$, welches ja eine normale Menge ist. Die Grenzfunktion für $n = \Omega$ ist bei uns $f(x) = x^\Omega$. Diese Funktion ist gleich 0 für $x = 0$, gleich 1 für $x = 1$, aber unendlich klein für x_Ω mit

$$0 < x_\Omega \leq r < 1 \quad (r \text{ rational}).$$

Instruktiv ist das Verhalten der Funktion, die nach dem Bewiesenen stetig ist, in einer infinitesimalen Umgebung von 1. Betrachten wir die Argumentwerte

$$x = 1 - \omega^v \xi \quad (\xi \text{ positiv rational, } v \text{ ganz } \geq 0),$$

so erhalten wir

$$x^\Omega = (1 - \omega^v \xi)^\Omega = (1 - \omega(\xi \omega^{v-1}))^\Omega,$$

also

$$x^\Omega \cong 1 \quad \text{für} \quad v > 1,$$

aber

$$x^\Omega = e(-\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{\Omega}\right)^\Omega \quad \text{für} \quad v = 1.$$

Für den kritischen Wert $v = 1$ wächst die Funktion also wie eine Exponentialfunktion an. Man beachte übrigens, daß hier ε_Ω und $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ aus der Definition der Stetigkeit tatsächlich von verschiedener Größenordnung sind.

Das hier angewendete Verfahren, durch geeignete „unendliche Vergrößerung“ eines infinitesimalen Bereichs den Verlauf einer Funktion im Endlichen anschaulich wiederzugeben, werden wir im folgenden oft benutzen.

Wie wir später (in § 4) noch sehen werden, läßt sich nicht ohne weiteres ein Analogon des Häufungstellensatzes von BOLZANO-WEIERSTRASS für die Ω -Zahlen beweisen oder auch nur formulieren. Bemerkenswerterweise lassen sich aber die gleichmäßige Stetigkeit und die Beschränktheit einer in einem abgeschlossenen Intervall (endlicher oder unendlicher Länge) stetigen Funktion hier ohne einen verallgemeinerten Häufungstellensatz oder Verwandtes beweisen, wie wir jetzt zeigen wollen.

Satz 3. $f(x)$ sei eine für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ definierte und daselbst stetige, normale Funktion. Dann ist $f(x)$ in diesem Intervall gleichmäßig stetig und beschränkt durch eine positive Ω -Zahl $\overline{M}_\Omega (|f(x)| \leq \overline{M}_\Omega)$.

Beweis.

a) Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit. Ist $f(x_\Omega) = f_\Omega$, so definiere man Funktionen $f_n(x_n)$ durch

$$f_n(x_n) = f_n$$

jeweils in den Intervallen $a_n \leq x_n \leq b_n$. Damit hat man im abgeschlossenen Intervall $a_n \leq x_n \leq b_n$ (rationale Endpunkte) für alle rationalen Zahlen eine rationalwertige Funktion definiert^{6a)}, von der jetzt gezeigt werden soll, daß sie im üblichen (engeren) Sinne stetig ist. Die Stetigkeit von $f(x)$ besagt: Zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ existiert ein (eventuell von x_Ω abhängiges) $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega) > 0$, so daß

$$|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad |x_\Omega - x'_\Omega| < \delta_\Omega(\varepsilon_\Omega).$$

Ersetzt man hierin alle Ausdrücke durch ihre rationalen Komponenten, so ergibt sich ($\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ habe die Komponenten δ_n):

$$|f_n(x_n) - f_n(x'_n)| < \varepsilon_n \quad \text{für} \quad |x_n - x'_n| < \delta_n.$$

Da man ε_Ω beliebig klein vorgeben darf, kann ε_n als beliebig kleine positive rationale Zahl gewählt werden; die Funktion $f_n(x_n)$ ist also stetig (im engeren Sinne) in jedem rationalen Punkt des Intervalls $a_n \leq x_n \leq b_n$, mithin daselbst gleichmäßig stetig: Zu jedem positiven rationalen ε_n kann $\delta_n = \delta_n(\varepsilon_n)$ also unabhängig von x_n gewählt werden. Gibt man nun ε_Ω beliebig positiv vor und bestimmt diese $\delta_n = \delta_n(\varepsilon_n)$ zu den Komponenten ε_n von ε_Ω , so erfüllt $\delta_\Omega = \lim_{n \rightarrow \Omega} \delta_n$ gleichmäßig für alle x_Ω des Intervalles $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ die Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit, was zu beweisen war.

b) Beweis der Beschränktheit. Wir können jetzt bereits von der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion Gebrauch machen. Es gibt daher eine positive Ω -Zahl δ_Ω , so daß

$$|f(x_\Omega) - f(x'_\Omega)| < 1 \quad \text{für} \quad |x_\Omega - x'_\Omega| < 2\delta_\Omega.$$

Dabei kann δ_Ω so gewählt werden, daß $N_\Omega = \frac{b_\Omega - a_\Omega}{\delta_\Omega}$ eine positive ganze Zahl ist. Dann ist jedenfalls für positive ganze Zahlen $0 < M_\Omega \leq N_\Omega$:

$$f(a_\Omega + M_\Omega \delta_\Omega) = f(a_\Omega) + \sum_{n=0}^{M_\Omega-1} \{f(a_\Omega + (n+1)\delta_\Omega) - f(a_\Omega + n\delta_\Omega)\}$$

oder

$$|f(a_\Omega + M_\Omega \delta_\Omega)| \leq |f(a_\Omega)| + M_\Omega \leq |f(a_\Omega)| + N_\Omega.$$

Wir zeigen nun noch, daß zu jedem x_Ω aus unserem Intervall ein positives ganzes M_Ω existiert, so daß

$$|x_\Omega - (a_\Omega + M_\Omega \delta_\Omega)| \leq \delta_\Omega.$$

Denn es gibt eine positive natürliche Zahl M_n , so daß

$$|x_n - (a_n + M_n \delta_n)| \leq \delta_n.$$

^{6a)} Daß f_n dadurch eindeutig definiert ist, folgt aus der Normalität der Funktion $f(x)$.

Es ist also

$$|f(x_n) - f(a_n + M_n \delta_n)| \leq 1$$

mithin

$$|f(x_\Omega)| \leq |f(a_\Omega)| + N_\Omega + 1.$$

Damit ist die Beschränktheit von $f(x_\Omega)$ im betrachteten abgeschlossenen Intervall bewiesen⁷⁾.

Ein weiterer wichtiger Satz über stetige Funktionen in abgeschlossenen Intervallen ist in der gewohnten Analysis der Approximationssatz von WEIERSTRASS, den wir auf unsere Zahlen und Funktionen verallgemeinern wollen.

Satz 4 (Approximationssatz). *Ist $f(x)$ eine in $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ stetige, normale Funktion, so existiert zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ eine Funktion $g(x)$ mit*

$$|f(x_\Omega) - g(x_\Omega)| < \varepsilon_\Omega \quad \text{für} \quad a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$$

und

$$g(x_\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_n), \quad \text{wobei} \quad g_n(x_n) \quad \text{in} \quad a_n \leq x_n \leq b_n$$

definierte Polynome mit rationalen Koeffizienten sind. [$g(x)$ ist dann übrigens ein „Polynom unendlich hohen Grades“:

$$g(x) = \sum_{r=0}^{N_\Omega} a_\Omega^{(r)} x^r \Big].$$

Beweis. Zunächst sieht man, daß man den Beweis nur für das Intervall $0 \leq x_\Omega \leq 1$ zu führen braucht, da man von $f(x)$ zu $\varphi(\xi) = \varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$ übergehen kann. Dann gilt für die Bernsteinschen Approximationspolynome

$$B_{N_\Omega}(x) = \sum_{k=0}^{N_\Omega} \binom{N_\Omega}{k} x^k (1-x)^{N_\Omega-k} f\left(\frac{k}{N_\Omega}\right)$$

die Beziehung

$$|f(x) - B_{N_\Omega}(x)| \leq \tilde{\varepsilon}_{N_\Omega} + \frac{M_\Omega}{2 \sqrt[N_\Omega]{N_\Omega}}$$

mit

$$\tilde{\varepsilon}_{N_\Omega} \leq \left| f(x) - f\left(\frac{k}{N_\Omega}\right) \right|, \quad \left\{ \text{für} \quad \frac{k}{N_\Omega} - x \leq \frac{1}{\sqrt[N_\Omega]{N_\Omega}} \right\} \quad \text{und} \quad M_\Omega \geq |f(x)|.$$

(Statt $\sqrt[N_\Omega]{N_\Omega}$, $\sqrt[N_\Omega]{N_\Omega}$ kann man hier etwa „unendlich benachbarte“ Ω -Zahlen verwenden, d.h. solche positive Ω -Zahlen, deren Quadrat oder Biquadrat

⁷⁾ Wir haben im Beweis zu a) benutzt, daß jede im üblichen (engeren) Sinne in einem Intervall rationaler Zahlen (mit rationalen Endpunkten) stetige rationalwertige Funktion daselbst gleichmäßig stetig ist; dies kann man wie üblich indirekt beweisen. Dazu benötigt man den Häufungsstellensatz für rationale Zahlen in folgender Form: Jede beschränkte unendliche Menge von rationalen Zahlen enthält eine Cauchy-konvergente Teilfolge. Im Beweis zu b) könnte man auch auf die Beschränktheit solcher rationalwertiger Funktionen zurückgreifen, doch haben wir dies hier vermieden, um möglichst wenig Hilfsmittel über die bei uns nur als Spezialfälle auftretenden rationalwertigen Funktionen heranziehen zu müssen.

unendlich wenig von N_Ω abweicht.) Der Beweis von BERNSTEIN ist elementar und läßt sich mit unseren Mitteln durchführen. (Man kann ihn wörtlich etwa aus ACHIESER, Vorlesungen über Approximationstheorie, Berlin 1953, p. 30–31, übernehmen.)

Diese Polynome leisten nun bereits eine Approximation bis auf beliebig unendlich kleine Fehler:

$$|f(x) - B_{N_\Omega}(x)| < \varepsilon_\Omega$$

wenn nur N_Ω so gewählt wird, daß

$$\tilde{\varepsilon}_{N_\Omega} < \frac{\varepsilon_\Omega}{2}, \quad \frac{M_\Omega}{2 \sqrt{N_\Omega}} < \frac{\varepsilon_\Omega}{2}.$$

Setzt man nun $g(x)$ gleich einem geeigneten Bernsteinschen Approximationspolynom (eventuell unendlich hohen Grades)

$$g(x) = B_{N_\Omega}(x) = \sum_{k=0}^{N_\Omega} a_\Omega^{(k)} x^k,$$

dessen Koeffizienten natürlich im allgemeinen selbst Ω -Zahlen sein werden, so gilt

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon_\Omega$$

und $g(x) = \lim_{n \rightarrow \Omega} g_n(x_n)$

mit $g_n(x) = \sum_{k=0}^{N_n} a_n^{(k)} x^k$. [Da $g_n(x_n)$ gerade die Komponentenfolge von $g_\Omega(x_\Omega)$ ist, gehört x_n jedenfalls auch zum Definitionsbereich von g_n .] Damit ist alles gezeigt⁸⁾.

§ 2. Differentiation

Es ist naheliegend, die Ableitung einer Funktion $f(x)$ für das Argument x mittels der Differenzenquotienten

$$f'_\omega(x) = \frac{1}{\omega} \{f(x + \omega) - f(x)\}$$

zu genügend kleinen Zuwächsen ω mit $|\omega| > 0$ zu erklären; einen solchen Differenzenquotienten werden wir gelegentlich auch als *Differentialquotienten* zum *Differential* $dx = \omega$ bezeichnen. Für die Anwendungen kommt man in den meisten Fällen mit solchen Differentialquotienten aus, obwohl sich diese im allgemeinen noch ändern, wenn man das Differential verändert. Daher ist es sinnvoll, auch den Begriff der Ableitung einzuführen, die — geometrisch

⁸⁾ Auch diesen Satz könnte man schneller beweisen unter Berufung auf den Weierstraßschen Approximationssatz für die rationalwertigen, im engeren Sinne stetigen Funktionen $f_n(x_n)$, die im Beweis a) zu Satz 3 eingeführt wurden. [Man brauchte $g_n(x_n)$ nämlich nur als rationale Polynome mit $|g_n(x_n) - f_n(x_n)| < \varepsilon_n$ für $a_n \leq x_n \leq b_n$ zu wählen.] Prinzipiell ist es jedoch interessanter, einen direkten Beweis für alle unsere stetigen Funktionen zu geben, und zwar aus den gleichen Gründen, wie wir sie in Fußnote 7) (S. 23) angegeben haben.

gesprochen — die Steigung der Tangente beschreibt, während die Differentialquotienten die Steigungen von Sekanten angeben, welche durch benachbarte Kurvenpunkte gehen. Während die Differentialquotienten natürlich stets existieren, wenn nur x und $x + \bar{\omega}$ dem Definitionsbereich angehören, gilt dies für die Ableitung nicht immer. Wir definieren:

Definition. Die Funktion $f(x)$ heißt für das Argument x differenzierbar, wenn es zu jeder positiven Ω -Zahl ε_Ω eine positive Ω -Zahl δ_Ω gibt, so daß

$$|f'_{\bar{\omega}}(x) - f'_{\tilde{\omega}}(x)| < \varepsilon_\Omega \quad \text{wenn nur} \quad x, x + \bar{\omega}, x + \tilde{\omega}$$

im Definitionsbereich liegen und $0 < |\bar{\omega}| < \delta_\Omega, 0 < |\tilde{\omega}| < \delta_\Omega$.

Wenn eine Ω -rationale Zahl $f'(x)$ existiert, so daß es zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ ein $\delta_\Omega > 0$ gibt mit $|f'(x) - f'_{\bar{\omega}}(x)| < \varepsilon_\Omega$ für $|\bar{\omega}| < \delta_\Omega$, so nennen wir $f'(x)$ die *Ableitung* von $f(x)$ an der Stelle x .

Die *Ableitung* ist, wenn sie existiert, offenbar *eindeutig* bestimmt. — *Aus der Existenz der Ableitung folgt die Differenzierbarkeit.*

Für die Ableitung gelten die bekannten Regeln, die man ganz wie üblich beweisen kann (*Kettenregel, Produktregel* usw.). Diese Regeln gelten hier aber auch für unendlich große und unendlich kleine Werte der Ableitungen.

Es ist jedoch wichtig, sich die entsprechenden Regeln auch für Differentialquotienten zu überlegen. Wir geben als Beispiel die Kettenregel an, wobei wir voraussetzen, daß alle Argumente in den jeweiligen Definitionsbereichen liegen:

Sei $h(x) = f(g(x))$; dann berechnet man sofort

$$h'_{\bar{\omega}}(x) = f'_{\tilde{\omega}}(g(x)) \cdot g'_{\bar{\omega}}(x),$$

wobei

$$\tilde{\omega} = g'_{\bar{\omega}}(x) \bar{\omega}.$$

Wir geben Differentialquotienten und Ableitungen für einige einfache Funktionen an:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_\Omega, & f'_{\bar{\omega}}(x) &= 0, & f'(x) &= 0, \\ f(x) &= x, & f'_{\bar{\omega}}(x) &= 1, & f'(x) &= 1, \\ f(x) &= x^2, & f'_{\bar{\omega}}(x) &= 2x + \bar{\omega}, & f'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

Man zeigt, daß jede rationale Funktion in allen Stellen ihres Definitionsbereiches (d.h. mit Ausnahme von Polstellen) differenzierbar ist und die bekannte Ableitung hat. Bei einer rationalen Funktion mit rationalen Koeffizienten weichen die Werte der Differentialquotienten für unendlich kleine Differentiale dx bei reellem x unendlich wenig von den Werten der Ableitung ab, und die Ableitung ist eine rationale Zahl, wenn x rational ist.

Wie üblich zeigt man auch, daß *aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt*.

Ähnlich wie die Stetigkeit (Satz 2) überträgt sich auch die Differenzierbarkeit auf die Grenzfunktion einer Funktionenfolge:

Satz 5. (Differenzierbarkeit der Grenzfunktion einer Folge differenzierbarer Funktionen.)

Es sei $f(x_\Omega) = \lim_{n=\Omega} {}^{(n)}f(x_n)$, und ${}^{(n)}f(x_n)$ sei an der Stelle x_n rationalwertig und differenzierbar im gewöhnlichen Sinne [und habe die Ableitung ${}^{(n)}f'(x_n)$]. Dann ist $f(x_\Omega)$ an der Stelle x_Ω differenzierbar [und hat die Ableitung

$$f'(x_\Omega) = \lim_{n=\Omega} {}^{(n)}f'(x_n)].$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt also für jedes n : zu vorgegebenem rationalen $\varepsilon_n > 0$ gibt es ein $\delta_n(\varepsilon_n) > 0$ so daß

$$(*) \quad |{}^{(n)}f'_{\bar{\omega}^{(n)}}(x_n) - {}^{(n)}f'_{\tilde{\omega}^{(n)}}(x_n)| < \varepsilon_n$$

für $0 < |\bar{\omega}^{(n)}|, |\tilde{\omega}^{(n)}| < \delta_n$ ($\bar{\omega}^{(n)}, \tilde{\omega}^{(n)}$ rational). Sei nun ein beliebiges positives ε_Ω vorgegeben; es soll gezeigt werden: Es gibt ein positives $\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega)$ so daß für alle $\bar{\omega}_\Omega, \tilde{\omega}_\Omega$ mit $0 < |\bar{\omega}_\Omega|, |\tilde{\omega}_\Omega| < \delta_\Omega$ gilt

$$(**) \quad |f'_{\bar{\omega}_\Omega}(x_\Omega) - f'_{\tilde{\omega}_\Omega}(x_\Omega)| < \varepsilon_\Omega.$$

definiere man

$$\delta_\Omega(\varepsilon_\Omega) = \lim_{n=\Omega} \delta_n(\varepsilon_n).$$

Dann gelten für die Komponenten der beiden Seiten von (**) aber die Ungleichungen (*), womit die Behauptung der Differenzierbarkeit bewiesen ist.

Existieren die Ableitungen sämtlicher Näherungsfunktionen, so wiederhole man den Beweisgang mit ${}^{(n)}f'(x_n)$ anstelle von ${}^{(n)}f'_{\tilde{\omega}_n}(x_n)$, um die Grenzbeziehung für die Ableitung $f'(x_\Omega)$ zu erhalten.

Dieser Satz ergibt zusammen mit dem Approximationssatz 4: Jede stetige normale Funktion läßt sich mit beliebig unendlich kleiner Genauigkeit durch eine unendlich oft differenzierbare Funktion ersetzen.

Man beachte, daß eine differenzierbare Funktion nicht in jedem Punkte eine Ableitung besitzen muß (die „Ableitung“ könnte nämlich „irrational“ sein). Meistens kommt es jedoch auf relativ unendlich kleine Fehler nicht an, und man kann daher oft die Ableitung durch die Größenklasse der Differentialquotienten zu genügend kleinen Differentials erklären. Regeln für das Rechnen mit solchen Größenklassen haben wir früher (Kapitel I, § 3) bereits hergeleitet.

§ 3. Integration

Den intuitiven Hintergrund für die Erklärung des Integrals bildet wie bei RIEMANN der Grenzwert der Inhalte von approximierenden Treppenpolygonen. Seien zwei Ω -Zahlen a_Ω, b_Ω mit $a_\Omega < b_\Omega$ als Intervallgrenzen gegeben; dann bezeichnen wir als Unterteilung T von der Feinheit $\leq \omega'$ eine Folge von

positiven Ω -Zahlen $\omega_\Omega^{(n)} \leq \omega'$, für welche gilt ⁹⁾

$$\sum_{n=1}^{g_\Omega} \omega_\Omega^{(n)} = b_\Omega - a_\Omega.$$

Die Zahlen

$$a_\Omega + \sum_{n=1}^{N_\Omega} \omega_\Omega^{(n)} \quad (0 < N_\Omega \leq g_\Omega)$$

heißen *Teilpunkte*. Die „Anzahl g_Ω der Teilintervalle“ hängt natürlich von der Unterteilung ab.

Es sei nun $f(x)$ eine Funktion, zu deren Definitionsbereich alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ gehören. Dann nennen wir den folgenden Ausdruck

$${}^{(T)} \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{g_\Omega} f\left(a_\Omega + \sum_{v=1}^n \omega_\Omega^{(v)}\right) \omega_\Omega^{(n)}$$

eine *Unterteilungssumme* der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ zur *Unterteilung* (T) .

Definition. Die Funktion $f(x)$ heißt über dem Intervall $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ *integrierbar*, wenn alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ zu ihrem Definitionsbereich gehören, und wenn es zu jedem positiven ε_Ω ein positives δ_Ω gibt, so daß

$$\left| {}^{(T_1)} \int_a^b f(x) dx - {}^{(T_2)} \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon_\Omega$$

für je zwei Unterteilungen T_1, T_2 , deren Feinheit höchstens δ_Ω ist. Gibt es eine Ω -Zahl $\mathfrak{J}$, so daß zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ ein $\delta_\Omega > 0$ existiert mit

$$\left| \mathfrak{J} - {}^{(T)} \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon_\Omega$$

für alle Unterteilungen T , deren Feinheit höchstens δ_Ω ist, so nennen wir $\mathfrak{J}$ das *Integral* der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ und schreiben

$$\mathfrak{J} = \int_a^b f(x) dx.$$

Aus der Existenz des Integrals folgt die Integrierbarkeit. — Da Integrale mit beliebiger unendlich kleiner Genauigkeit durch Unterteilungssummen zu genügend feinen Unterteilungen ersetzt werden können, kommt man in den Anwendungen mit Unterteilungssummen aus und braucht Integrale meist nicht zu betrachten. Auch für Integrale gilt das bereits bei der Ableitung Gesagte

⁹⁾ Dies heißt für die Komponenten: Es ist eine Doppelfolge $\omega_n^{(m)}$ von positiven rationalen Zahlen (m, n natürliche Zahlen) und eine Folge g_n von natürlichen Zahlen vorgegeben, so daß

$$\omega_v^{(m_v)} \leq \omega'_v$$

und $\sum_{n=1}^{g_v} \omega_v^{(n)} = b_v - a_v$ für alle natürlichen Zahlen v .

über Ersetzung von Integralen oder Unterteilungssummen durch ihre Größenklassen.

Ein für die Anwendungen wichtiger Gesichtspunkt ist, daß die Integrationsgrenzen auch (dem Betrage nach) unendlich groß sein dürfen, was gelegentlich die Behandlung uneigentlicher Integrale ohne weitere Zusatzüberlegungen erlaubt.

Man kann in der Definition der Unterteilungssummen wie üblich auch Funktionswerte im Innern eines Teilintervalls heranziehen, anstatt den Funktionswert im rechten Endpunkt zu wählen. Auf diese ohne Schwierigkeiten zu vollziehende Erweiterung der Definition verzichten wir hier im Interesse der Kürze.

Den wichtigsten Typ von Unterteilungen bilden die *gleichmäßigen Unterteilungen*:

$$\omega_{\Omega}^{(n)} = \omega' \quad \text{für alle } n,$$

deren Feinheit beliebig klein gewählt werden kann. Wir schreiben in diesem Fall statt (T) auch (ω') .

Die Hauptsätze über Integrale lassen sich in Formulierung und Beweis (mutatis mutandis) aus der Riemannschen Theorie übernehmen. Die Übertragung der Beweise dürfen wir in den meisten Fällen dem Leser überlassen. Sowohl Unterteilungssummen als auch Integrale sind lineare Funktionale der Integrandenfunktion. Ebenso direkt ist zu sehen, daß

$$(T_1) \int_a^b f(x) dx + (T_2) \int_b^c f(x) dx = (T_3) \int_a^c f(x) dx$$

wo T_3 die durch Zusammensetzung der Unterteilungen T_1 und T_2 entstehende Unterteilung des Gesamtintervalls ist:

$$\sum_{n=1}^{g_{\Omega}+h_{\Omega}} f\left(a_{\Omega} + \sum_{v=1}^n \omega_{\Omega}^{(v)}\right) \omega_{\Omega}^{(n)} = \sum_{n=1}^{g_{\Omega}} f\left(a_{\Omega} + \sum_{v=1}^n \omega_{\Omega}^{(v)}\right) \omega_{\Omega}^{(n)} + \sum_{n=1}^{h_{\Omega}} f\left(b_{\Omega} + \sum_{v=1}^n \tilde{\omega}_{\Omega}^{(v)}\right) \tilde{\omega}_{\Omega}^{(n)}$$

mit

$$\tilde{\omega}_{\Omega}^{(n)} = \omega_{\Omega}^{(g_{\Omega}+n)} = \lim_{m=\Omega} \omega_m^{(g_m+n)}.$$

Für Integrale gilt der entsprechende Satz.

Es gilt der *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung*. Wir wollen ihn hier der Kürze der Formulierung wegen nur für den Fall einer gleichmäßigen Unterteilung angeben:

$$F'_{\omega'}(x) = f(x) \quad \text{für} \quad F(x) = (\omega') \int_a^x f(x) dx.$$

Dies ist also eine Aussage über Differentialquotienten zum Differential $dx = \omega'$ und über Unterteilungssummen. Entsprechend gilt der Fundamentalsatz auch für Ableitungen und Integrale.

Die praktisch wichtigsten Beispiele integrierbarer Funktionen sind die stetigen Funktionen.

Satz. Sei $f(x)$ für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ normal und stetig; dann ist $f(x)$ über diesem Intervall integrierbar.

Der Beweis ergibt sich wie üblich aus der gleichmäßigen Stetigkeit (Satz 3).

§ 4. Zwischenwertsatz und Mittelwertsätze

Man wird im allgemeinen nicht erwarten können, daß eine für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ stetige Funktion $f(x)$ mit $f(a_\Omega) < 0$ und $f(b_\Omega) > 0$ an mindestens einer Ω -rationalen Zwischenstelle den Wert 0 annimmt. Dies zeigt schon das Beispiel $f(x) = x^2 - 2$, $a = 0$, $b = 2$. Aber man sieht, daß man zu jedem positiven Ω -rationalen ε_Ω ein x_Ω aus dem Intervall so finden kann, daß $|f(x_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$. Dies soll nun allgemein für stetige Funktionen bewiesen werden.

Zuvor sei jedoch bemerkt, daß man den Zwischenwertsatz hier nicht — wie in der üblichen Analysis — mittels des Häufungsstellensatzes von BOLZANO-WEIERSTRASS beweisen kann. Dieser Häufungsstellensatz gilt hier nämlich sicher nicht ohne Modifikation, wie man schon an der Folge $a_n = 1/n$ sieht, welche keine Häufungsstelle in dem Sinne besitzt, daß fast alle Zahlen der Folge in beliebiger (auch unendlich kleiner) Umgebung dieser Stelle lägen. Erst wenn man Aussagen über verallgemeinerte Folgen macht, die jeder positiven ganzen Ω -Zahl n_Ω eine Ω -rationale Zahl a_{n_Ω} zuordnen, wird ein Häufungsstellensatz beweisbar, worauf wir hier jedoch nicht einzugehen brauchen.

Wir beweisen den Zwischenwertsatz hier mittels des Approximationssatzes (Satz 4) aus § 2.

Satz 6 (Zwischenwertsatz). Die Funktion $f(x)$ sei für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ normal und stetig, und es sei

$$f(a_\Omega) < 0 < f(b_\Omega).$$

Dann existiert zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ ein x_Ω aus dem Intervall, so daß $|f(x_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$.

Beweis. Es genügt, solche ε_Ω zu betrachten, für die

$$f(a_\Omega) < -\varepsilon_\Omega < 0 < \varepsilon_\Omega < f(b_\Omega).$$

Zunächst wählen wir nun gemäß Satz 4 ein Approximationspolynom $g(x)$, so daß

$$|f(x_\Omega) - g(x_\Omega)| < \frac{1}{2} \varepsilon_\Omega$$

für alle x_Ω aus dem Intervall. Ferner seien $g_n(x_n)$ die in Satz 4 bestimmten rationalen Polynome mit

$$\lim_{n=\Omega} g_n(x_n) = g(x_\Omega).$$

Nach Voraussetzung ist

$$g(a_\Omega) < -\frac{1}{2} \varepsilon_\Omega < 0 < \frac{1}{2} \varepsilon_\Omega < g(b_\Omega),$$

also

$$g_n(a_n) < -\frac{1}{2} \varepsilon_n < 0 < \frac{1}{2} \varepsilon_n < g_n(b_n).$$

Daher existiert nach dem gewöhnlichen Zwischenwertsatz für rationale Polynome eine rationale Zahl r_n mit $a_n < r_n < b_n$, so daß

$$|g_n(r_n)| < \frac{1}{2} \varepsilon_n.$$

Für $r_\Omega = \lim_{n \rightarrow \Omega} r_n$ gilt mithin $a_\Omega < r_\Omega < b_\Omega$ und $|g(r_\Omega)| < \frac{1}{2} \varepsilon_\Omega$, somit nach der Dreiecksungleichung

$$|f(r_\Omega)| < \varepsilon_\Omega$$

was zu beweisen war.

Unter den gleichen Voraussetzungen wie beim Zwischenwertsatz beweist man ganz ähnlich den folgenden

Satz 7 (Satz vom Maximum und Minimum einer stetigen Funktion). Die Funktion $f(x)$ sei für alle x_Ω mit $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ normal und stetig. Dann gibt es zu jedem positiven ε_Ω Ω -rationale Zahlen c_Ω, d_Ω aus dem Intervall mit

$$f(c_\Omega) - \varepsilon_\Omega \leq f(x_\Omega) \leq f(d_\Omega) + \varepsilon_\Omega$$

für alle x_Ω aus dem Intervall.

Diese Sätze finden ihre Hauptanwendung beim Beweis der Mittelwertsätze, zu denen wir jetzt übergehen.

Satz 8 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien $f(x), g(x)$ in $a_\Omega \leq x_\Omega \leq b_\Omega$ normale stetige Funktionen, und gelte $g(x) \geq 0$. Dann gibt es (bei fester Teilung T) zu jedem $\varepsilon_\Omega > 0$ eine Stelle y_Ω des Intervalls, so daß

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx - f(y_\Omega) \cdot \int_a^b g(x) dx \right| < \varepsilon_\Omega.$$

Der Beweis verläuft unter Verwendung des Satzes vom Maximum und Minimum und des Zwischenwertsatzes wie üblich (z.B. R. COURANT, Differential- und Integralrechnung I, p. 102).

Der hier für Unterteilungssummen ausgesprochene Satz gilt in entsprechender Formulierung auch für Integrale. Als Folgerung beweist man in bekannter Weise den *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* unter der Voraussetzung, daß die Ableitung oder der Differentialquotient zu vorgegebenem Differential im betrachteten Intervall existieren.

Kapitel III. Einige Beispiele und Anwendungen

§ 1. Die elementaren Funktionen

Als erste Beispiele für die in dieser Arbeit vorgeschlagene Modifikation und Erweiterung der Analysis behandeln wir die sog. elementaren Funktionen, insbesondere also die Exponentialfunktion, den Logarithmus, die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen. Es wird sich zeigen, daß diese Funktionen sogar durch eine spezielle Klasse, die der „quasirationalen“ Funktionen, erhalten werden können; dabei verstehen wir unter *quasirationalen Funktionen* (ähnlich wie wir in Kap. I, § 1 die quasirationalen Zahlen definierten) solche,

deren expliziter Ausdruck sich aus 1, Ω und x allein mittels rationaler und quasirationaler Operationen (Σ, II) herstellen läßt. Die quasirationalen Funktionen sind übrigens sämtlich stetige normale Funktionen (Anwendung von Satz 2).

Wir definieren zunächst eine Reihe von Funktionen:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & e_{(N_\Omega)}(x) = \left(1 + \frac{x}{N_\Omega}\right)^{N_\Omega}, \\
 (2) \quad & \bar{e}_{(N_\Omega)}(x) = \sum_{n=0}^{N_\Omega} \frac{x^n}{n!}, \\
 (3) \quad & \sin_{(N_\Omega)} x = \sum_{n=0}^{N_\Omega} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n, \\
 (4) \quad & \cos_{(N_\Omega)} x = \sum_{n=0}^{N_\Omega} \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n, \\
 (5) \quad & \operatorname{arc} \operatorname{tg}_{(N_\Omega)} x = \sum_{n=0}^{N_\Omega} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \\
 (6) \quad & \begin{cases} \log_{(N_\Omega)} x = \sum_{n=\bar{\Omega}}^{N_\Omega + \bar{\Omega}} \frac{1}{n + \bar{\Omega}} = (\bar{\omega}) \int_1^x \frac{dx}{x}, \\ \left(\bar{\Omega} = \frac{N_\Omega}{x-1}, \text{ ganz; } \bar{\omega} = \frac{1}{\bar{\Omega}} \right). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dabei darf N_Ω eine beliebige unendlich große positive ganze Ω -Zahl sein. Die Funktionen (1) bis (5) sind für jedes N_Ω für alle Ω -rationalen x_Ω (sogar für alle $x_\Omega = y_\Omega + i \cdot z_\Omega$, $i^2 = -1$, y_Ω, z_Ω Ω -rational) definiert, da keine Divisionen durch x auftreten. Alle sechs Funktionstypen sind quasirational. Man verifiziert sofort einfache Beziehungen wie die folgende:

$$\bar{e}_{(2N_\Omega+1)}(i \cdot x) = \cos_{(N_\Omega)} x + i \cdot \sin_{(N_\Omega)} x.$$

Selbstverständlich haben die definierten quasirationalen Funktionen aber nicht für alle x_Ω die Funktionaleigenschaften der Exponentialfunktion, der trigonometrischen Funktionen usw. Vom Standpunkt der gewohnten Analysis wird man die Gültigkeit solcher Beziehungen ja auch nur für denjenigen Teil des Definitionsbereiches erwarten dürfen, für den sie auch dort bewiesen werden, nämlich für $x_\Omega \sim 1$. Ehe wir zeigen, daß hier sogar mehr erreicht werden kann, wollen wir bemerken, daß die in jedem Lehrbuch der Analysis zu findenden Beweise hier z.B. ohne weiteres folgende Beziehungen ergeben:

$$\bar{e}_{(N_\Omega)}(x) \cong e_{(N_\Omega)}(x); \quad e_{(N_\Omega)}(\log x) \cong x; \quad e_{(N_\Omega)}(x+y) \cong e_{(N_\Omega)}(x) e_{(N_\Omega)}(y)$$

für alle reellen Ω -rationalen x_Ω, y_Ω (d.h. für alle Ω -Zahlen, die endlich und mit allen rationalen Zahlen vergleichbar sind). Ebenso folgen die Additions-

theoreme für die trigonometrischen Funktionen und die Funktionalgleichung des Logarithmus.

Es kommen aber in allen diesen Fällen zwei für unseren Aufbau charakteristische Verschärfungen zur Geltung: Einmal kann der unendlich kleine Fehler, der in allen diesen Relationen auftritt und der oft bei Vertauschungen von Grenzprozessen wichtig wird, abgeschätzt oder genau angegeben werden, und zweitens gelten diese Relationen oft auch noch für gewisse unendliche Argumente. Wir erläutern beides am Beispiel der Exponentialfunktion und ihrer Ableitung (für Differentialquotienten zu unendlich kleinen Differentialen ließen sich ähnliche Überlegungen durchführen):

$$e'_{(N_Q)}(x) = e_{(N_Q)}(x) \left(1 + \frac{x}{N_Q}\right)^{-1}$$

und

$$\bar{e}'_{(N_Q)}(x) = e_{(N_Q)}(x) - \frac{x^{N_Q}}{N_Q!}.$$

Man sieht also: Funktion und Ableitung stimmen bis auf einen genau angebbaren unendlich kleinen Fehler überein. Zu beliebig vorgegebenem x_Q läßt sich stets ein N_Q so bestimmen, daß e und e' (oder $\bar{e}$ und $\bar{e}'$) von gleicher Größe sind, d.h. daß der Unterschied relativ unendlich klein ist. Geht man also zu Größenklassen über, wie wir sie in Kapitel I, § 3 untersucht haben, so kann man für Funktionen, deren Werte Klassen sind, die Gültigkeit der Funktioneigenschaft exakt erreichen. Weiß man also, daß für ein vorliegendes Problem nur die Größenklassen und nicht die exakten Werte der Q -Zahlen interessieren, so kann man zu dieser anderen Art von Funktionen übergehen.

Nun können wir auch die allgemeine Potenz durch Zusammensetzung von Exponentialfunktion und Logarithmus ebenfalls durch quasirationale Funktionen bis auf beliebig unendlich kleine Fehler einführen:

$$a^b_{(N_Q)} = e_{(N_Q)}(b \cdot \log a)_{(N_Q)}.$$

§ 2. δ -Funktionen

Wohl das bekannteste Beispiel, bei dem es besonders naheliegt, unendlich kleine und unendlich große Zahlen zur Beschreibung zu verwenden, bildet die sog. Diracsche δ -Funktion, die an einer Stelle unendlich groß sein soll, an allen anderen Stellen verschwindet und ein endliches Integral besitzt. Eine solche Funktion läßt sich den klassischen Begriffen nicht unterordnen, und eine strenge Begründung hat bekanntlich L. SCHWARTZ im Rahmen der in seiner Distributionstheorie gegebenen Erweiterung des Funktionsbegriffs vorgenommen. Es scheint jedoch, daß man der Bedeutung dieser Funktion in den Anwendungen besser gerecht wird, wenn man sie in der folgenden Weise mit den Mitteln der hier vorgeschlagenen Modifikation der Analysis einführt.

Definition. Eine integrierbare Funktion $\delta(x)$ heißt δ -artig, wenn es eine positive unendlich kleine Ω -rationale Zahl r_Ω gibt, so daß

(I) $\delta(x)$ unendlich klein ist für $|x_\Omega| > r_\Omega$, und zwar so daß

$${}^{(T)}\int_a^b \delta(x) dx$$

unendlich klein ist für $r_\Omega < a < b$ oder $r_\Omega < -b < -a$.

(II) ${}^{(T)}\int_{-a}^{+a} \delta(x) dx \approx 1$ für $a \geq r_\Omega$ und hinreichend feine Unterteilungen (T).

Wir sagen dann, die δ -artige Funktion $\delta(x)$ habe eine Breite $\leq r_\Omega$.

Ein Beispiel einer δ -artigen Funktion ist

$$(4) \quad \delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega}{1 + \Omega^2 x^2},$$

wobei r_Ω^2 etwa relativ unendlich wenig von ω verschieden ist. Es gibt aber sehr viele wesentlich verschiedene Typen von δ -artigen Funktionen. Dies ist für praktische Zwecke von Vorteil, weil man die δ -Funktion der jeweiligen Problemstellung anpassen kann.

Ehe wir weitere wichtige Beispiele von δ -artigen Funktionen angeben und behandeln, soll bewiesen werden, daß alle δ -artigen Funktionen die wichtige Eigenschaft haben:

Satz 9. Sei $\delta(x)$ eine nicht-negative δ -artige Funktion mit einer Breite $\leq r_\Omega \ll 1$ und sei $f(x)$ eine im Sinne der gewohnten Analysis in $-a \leq x \leq +a$ ($|a| > 0$ für ein positives rationales 0) definierte, im üblichen Sinne stetige Funktion, die durch ein rationales M beschränkt sei. (Falls $f(x)$ nur für alle rationalen Zahlen des Intervalls definiert ist, erweitere man die Funktion durch stetige Fortsetzung — Kap. II, § 1 — auf alle Ω -rationalen Zahlen des Intervalls.) Dann gilt:

$${}^{(T)}\int_{-a}^{+a} \delta(x) f(x) dx \cong f(0),$$

wenn die Unterteilung T hinreichend fein ist.

Beweis. Wegen der Beschränktheit von $f(x)$ sind jedenfalls die beiden Integrale

$${}^{(T)}\int_{-a}^{-r} \delta(x) f(x) dx, \quad {}^{(T)}\int_r^{+a} \delta(x) f(x) dx \quad (a \geq r)$$

unendlich klein (dabei ist die Teilung T so zu wählen, daß $-r, +r$ Teilpunkte sind). Das übrigbleibende Integral

$${}^{(T)}\int_{-r}^{+r} f(x) \delta(x) dx$$

bleibt noch zu betrachten. In diesem Intervall gilt, weil die Funktion im gewöhnlichen Sinne stetig ist und das Intervall unendlich klein ist,

$$f(x) \cong f(0).$$

Also ergibt der Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 8)

$$(7) \int_{-r}^{+r} f(x) \delta(x) dx \cong f(0), \quad \text{weil} \quad \int_{-r}^{+r} \delta(x) dx \cong 1,$$

und daraus folgt die Behauptung.

Es ist leicht zu sehen, wie sich die Voraussetzungen in speziellen Fällen abschwächen lassen: $f(x)$ braucht nicht notwendig stetig im üblichen Sinne zu sein; es genügt, wenn $f(x)$ im Intervall $-r \leq x \leq +r$ unendlich kleine Schwankung hat. Auch die Forderung der Beschränktheit läßt sich abschwächen; es muß nur dafür gesorgt werden, daß die Integrale über die äußeren Intervalle unendlich klein sind.

Die Faltungseigenschaft kann also z. B. dann verletzt sein, wenn $f(x)$ selbst eine δ -artige Funktion von der gleichen Breite wie $\delta(x)$ ist; tatsächlich gilt für die δ -artige rationale Funktion (1), wie man leicht nachrechnet

$$\int_{-a}^{+a} \delta^2(x) dx \approx \frac{1}{2} \delta(0).$$

Man hat folgendes Erzeugungsprinzip für δ -artige Funktionen: Sei $g(x)$ eine im üblichen Sinne definierte (d. h. etwa in rationalen Punkten rationalwertige) Funktion, welche nicht-negativ sei, und deren Integral (im üblichen Sinne) von $-\infty$ bis $+\infty$ den Wert 1 habe, und die ihr Maximum im Nullpunkt annehme und von dort nach beiden Seiten monoton abfalle. Dann sind die folgenden Funktionen (für jedes unendlich große ganze positive N_Ω) δ -artig:

$$(2) \quad \delta(x_\Omega) = N_\Omega \cdot g(x_\Omega N_\Omega).$$

[Dabei ist dieser Funktionswert natürlich erklärt als Limes für $n = \Omega$ der Folge $N_n \cdot g(x_n \cdot N_n)$]

Nach diesem Prinzip erhält man aus

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

für $n = \Omega$ gerade die δ -artige Funktion (1) und für $n = N_\Omega$ die Funktionen

$$(3) \quad \delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{N_\Omega}{1+x^2 N_\Omega^2}.$$

Die Glockenfunktion $g(x)$ selbst darf auch bereits Ω explizit enthalten. Dies trifft z. B. zu für die folgende „kastenförmige“ Funktion

$$(4) \quad g(x) = \frac{c}{1 + (1 + x^2 - a^2)^\Omega}$$

mit $c = \frac{1}{2a}$, a rational, $|a| < 1$.

Schon aus der Definition folgt, daß das unbestimmte Integral einer δ -artigen Funktion

$$\eta(x) = \int_0^x \delta(y) dy$$

eine „Sprungfunktion“ ist, die freilich in stetiger Weise in einer infinitesimalen Umgebung der Zahl 0 einen „Sprung“ einer unendlich wenig von 1 verschiedenen Höhe ausführt. Ist die Funktion $\delta(x)$ differenzierbar, so ist die Ableitung eine „Dipolfunktion“. Für die δ -Funktion (1) erhält man z.B.

$$\eta(x) \cong \frac{1}{\pi} \arctg_{(\Omega)} x$$

und

$$\delta'(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{\Omega^2 x}{(1 + \Omega^2 x^2)^2}.$$

Diese Dipolfunktion δ' nimmt ihre Extrema für $x = \pm \frac{1}{\Omega \sqrt{3}}$ an.

Die hier betrachteten Beispiele von δ -artigen Funktionen sind symmetrisch: $\delta(-x) = \delta(x)$. Diese Klasse von δ -artigen Funktionen ist deshalb besonders wichtig, weil ihre Ableitungsfunktionen antisymmetrischen Dipolen entsprechen.

Eine weitere für Anwendungen wichtige Klasse von δ -artigen Funktionen wird durch Systeme orthonormierter Funktionen bestimmt.

§ 3. Potenzreihen, insbesondere ihr Verhalten an der Konvergenzgrenze

Bei einigen Gelegenheiten sind uns bereits Potenzreihen (oder „Polynome unendlichen Grades“) begegnet. Wir wollen diese jetzt etwas systematischer betrachten. Zuvor sei bemerkt, daß ein Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{N_{\Omega}} a_{\Omega}^{(n)} x^n$$

dessen Koeffizienten $a_{\Omega}^{(n)}$ beliebige Ω -rationale Zahlen sein dürfen, für alle Ω -rationalen Zahlen x_{Ω} selbst eine Ω -rationale Zahl darstellt, also jedenfalls stets „konvergiert“. Andere Fragen sind aber die nach der Änderung dieses Ausdrucks bei Veränderung der oberen Summationsgrenze, oder nach der (bis auf unendlich kleine oder relativ unendlich kleine Fehler) exakten Darstellung von Funktionen durch derartige Potenzreihen.

Als einfaches, aber schon charakteristisches Beispiel betrachten wir hier die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{N_{\Omega}} x^n.$$

Diese Reihe läßt sich für alle von 1 entfernt gelegenen $x = x_{\Omega}$ (d.h. für solche, deren Komponenten sämtlich von 1 verschieden sind) exakt darstellen durch

$$\sum_{n=0}^{N_{\Omega}} x^n = \frac{1 - x^{N_{\Omega}+1}}{1 - x}.$$

Daraus entnimmt man: Die geometrische Reihe ist für diejenigen x_{Ω} bis auf einen unendlich kleinen Fehler gleich der Funktion

$$(1 - x)^{-1}, \quad \text{für die } |x^{N_{\Omega}+1}| \ll |1 - x|,$$

also jedenfalls für alle komplexen x , zu denen eine rationale Zahl r mit $0 < r < 1$ existiert, so daß $|x_\Omega| \leq r$. Für x mit $x_\Omega \geq r > 1$ hat man hingegen, daß der Wert der geometrischen Reihe unendlich groß ist, so daß die Reihe dort die Funktion, wie auch gar nicht anders zu erwarten, sicher nicht darstellt; wir erwähnen diesen Sachverhalt hier ausdrücklich im Hinblick auf den oft anzutreffenden Einwand gegen das Rechnen mit divergenten Ausdrücken (man vergleiche dazu BOLZANO, Paradoxien des Unendlichen, 1851 und auch H. DINGLER, Philosophie der Logik und Arithmetik, 1931): Man sagt, wenn ein solches Rechnen möglich sei, so müsse doch gemäß der Formel für die Summation der geometrischen Reihe gelten $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = -1$; eine Gleichung, die natürlich keinen Sinn hat und durch unsere Gleichung

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} 2^n = -1 + 2^{N_\Omega+1}$$

zu ersetzen ist, die ein unendlich großes Zusatzglied enthält.

Interessanter ist das Verhalten der Reihe in einer infinitesimalen Umgebung der Konvergenzgrenze. Wir nehmen die unwesentliche Substitution $x \rightarrow -x$ vor und haben

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} (-1)^n x^n = \frac{1 - (-1)^{N_\Omega+1} x^{N_\Omega+1}}{1+x}.$$

Betrachten wir nun $x = 1 - y\tilde{\omega}$ ($\tilde{\omega} = \frac{1}{N_\Omega}$) für rationale y . Es ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{N_\Omega} (-1)^n x^n \cong \frac{1 - (-1)^{N_\Omega+1} e(-y)}{2},$$

so daß also schon für dieses innerhalb des Einheitskreises gelegene y der Wert der Reihe um einen endlichen Betrag von der Zahl $\frac{1}{2} \cong \frac{1}{1+x}$ abweicht. Der Wert $\frac{1}{2}$ (den z.B. die Abelsche Summation als Summenwert der Reihe für $x=1$ bestimmt) wird hier also nur für solche $x = 1 - y\tilde{\omega}$ aus der reellen Zahlklasse 1 erhalten, für die y unendlich groß ist, z.B. also für $y = \log N_\Omega$.

Wir wollen nun auch noch — und zwar auch wieder an unserer speziellen Reihe — untersuchen, welche Deutung dem Verfahren der C_1 -Summation hier zu geben ist. Die n -te Partialsumme ist

$$s_n = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x},$$

und die C_1 -Summe ergibt sich als Limes für $n = \Omega - 1$ der arithmetischen Mittel der $n+1$ ersten Partialsummen zu

$$S = \frac{1}{\Omega} \sum_0^{\Omega-1} s_n = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{\Omega(x+1)} \left\{ \frac{1 + (-1)^{\Omega+1} x^\Omega}{1+x} \right\}.$$

Mithin ist für die Abweichung von $\frac{1}{1+x}$ verantwortlich

$$\omega \frac{x}{(1+x)^2} (1 - (-1)^\Omega x^\Omega).$$

Dieser Fehler ist unendlich klein, wenn $|x^\Omega|$ unendlich klein ist, also sicher auch für $x = 1 - y\omega^r$ (y rational, $r \geq 1$). Für diese x_ρ gilt daher

$$S \cong \frac{1}{1+x},$$

so daß der Grenzwert der Folge der Mittel der Partialsummen in diesen Fällen vom Grenzwert der Reihe selbst abweicht, und zwar gerade so, daß hier auch noch näher an der Konvergenzgrenze eine Darstellung der Funktion $\frac{1}{1+x}$ erreicht wird. Dies wird noch deutlicher, wenn man S selbst als unendliche Reihe schreibt:

$$S = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=0}^{\Omega-1} \sum_{m=0}^n (-1)^m x^m = \sum_{n=0}^{\Omega-1} x^n (-1)^n \omega (\Omega - n).$$

Zur ursprünglichen Reihe wird also noch die „konvergenzerzeugende“ Reihe

$$\sum_{n=0}^{\Omega-1} (-1)^{n+1} n \omega x^n$$

hinzugefügt, deren Glieder für endliche n unendlich klein sind, die aber im ganzen doch einen endlichen Beitrag liefert.

§ 4. Bedingt konvergente Reihen

Wir hatten bereits gesehen, daß wegen der durchgängigen Vertauschbarkeit der Reihenfolgen von Grenzübergängen hier gewisse Schwierigkeiten der gewohnten Analysis vermieden werden. Gleiches gilt auch bei der Umordnung und Multiplikation von Reihen, die im Sinne der gewohnten Analysis nur bedingt konvergieren.

Betrachten wir als ein Beispiel zunächst die Leibnizsche Reihe für $\log 2$. Vorweg bemerken wir, daß gilt

$$\sum_1^{\Omega} \frac{1}{n} - \log \Omega \cong C$$

wobei der Logarithmus bezüglich einer genügend großen Ω -Zahl, etwa Ω^{Ω} genommen sei; $\log$ bezeichne im folgenden kurz $\log_{(\Omega^{\Omega})}$. C ist eine reelle Zahl aus einer Klasse, die wir als Eulersche Konstante bezeichnen; der Beweis läßt sich aus der gewohnten Analysis übernehmen. Daher gilt bis auf einen unendlich kleinen Fehler

$$\sum_1^{\Omega} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_1^{\Omega} \frac{1}{n} \cong \frac{1}{2} \log \Omega + \frac{C}{2}$$

und ebenso

$$\sum_1^{\Omega} \frac{1}{2n+1} = \sum_1^{2\Omega+1} \frac{1}{n} - \sum_1^{\Omega} \frac{1}{2n} \cong \log(2\Omega+1) - \frac{1}{2} \log \Omega + \frac{C}{2},$$

und hiernach wieder bis auf einen unendlich kleinen Fehler

$$\sum_1^{2\Omega+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_1^{\Omega} \frac{1}{2n+1} - \sum_1^{\Omega} \frac{1}{2n} \cong \log(2\Omega+1) - \log \Omega \\ \cong \log(2+\omega) \cong \log 2.$$

Nun zeigt man in der gewohnten Analysis bekanntlich, daß die aus der Leibnizschen Reihe durch Umordnung hervorgehende Reihe

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

die Summe $\frac{3}{2} \log 2$ hat. Dies muß bei uns interpretiert werden. Da die Leibnizsche Reihe eine reelle Summe hat, können wir nach dem Hauptsatz über reelle Zahlklassen die Summation bis $4\Omega-1$ anstatt bis Ω erstrecken und dürfen schreiben:

$$\log 2 \cong \sum_1^{4\Omega-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_1^{\Omega} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) - \sum_{\Omega+1}^{2\Omega-1} \frac{1}{2n} \\ \cong \sum_1^{\Omega} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} \log 2 \quad ^{10)}$$

Für die in der gewohnten Analysis durch Umordnung der Leibnizschen Reihe erhaltene Reihe ergibt sich hier also natürlich ebenfalls der Summenwert $\frac{3}{2} \log 2$. Die neue Reihe ist aber in unserem Sinne keine Umordnung der Leibnizschen Reihe, weil ihr unendlich viele (negative) Summanden fehlen, die eine endliche Summe ergeben, welche gerade den Unterschied beider Reihen liefert.

Allgemein ist auch leicht zu sehen, daß hier der Summenwert einer Reihe stets unabhängig von der Reihenfolge der Glieder ist, sobald man dafür sorgt, daß in der umgeordneten Reihe wirklich alle Glieder der ursprünglichen Reihe (und nur diese) vorkommen. Diese Ausdrucksweise besagt natürlich auch hier, daß die entsprechende Aussage für die Komponenten zu gelten hat. Somit entfällt hier im Prinzip der Unterschied zwischen absoluter und bedingter Konvergenz, der freilich fürs praktische Rechnen insofern wesentlich bleibt, als man sich bei einer absolut konvergenten Reihe ohne weitere Überlegungen beliebige Umordnungen erlauben kann.

Entsprechende Überlegungen hat man bei der Multiplikation von Reihen anzuwenden. Sind zwei Reihen

$$A = \sum_0^{\Omega} a_n \quad \text{und} \quad B = \sum_0^{\Omega} b_n$$

gegeben, so wählt man für beide zweckmäßigerweise die gleiche obere Grenze (wir schreiben dafür der Einfachheit halber Ω), was bei Reihen, die im gewöhn-

¹⁰⁾ $\sum_{\Omega+1}^{2\Omega-1} \frac{1}{n} \cong \log 2$ folgt aus der Integraldefinition des Logarithmus.

lichen Sinne konvergieren, nach dem Hauptsatz auf die reelle Zahlklasse des Ergebnisses ohne Einfluß ist. Multipliziert man dann gliedweise aus (was erlaubt ist, da gliedweise Multiplikation für die Komponenten gestattet ist, die ja endliche Summen sind), so ergibt sich

$$A \cdot B = \sum_{n=0}^{\Omega} \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} + \sum_{n=0}^{\Omega-1} \sum_{m=0}^n a_{\Omega-n+m} b_{\Omega-m}.$$

Die erste Doppelsumme stellt das gewohnte Cauchy-Produkt dar, zu der die zweite als Fehlerglied hinzukommt. Ist nun wenigstens eine der beiden Reihen, etwa A absolut konvergent, so wird dieser Fehler unendlich klein (wie man ganz wie üblich beweisen kann), sobald B eine reelle Ω -Zahl ist. Sind hingegen A und B beide bedingt konvergent, so verschwindet die Fehlersumme im allgemeinen nicht, läßt sich dann aber gemäß unserer Integraldefinition oft in ein Integral umschreiben. Setzt man z.B.

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n+1}}$$

so erhält man nach einer längeren Rechnung, die wir nicht wiederzugeben brauchen, für die Zusatzsumme den Wert $\pm \frac{\pi}{2}$ (als reelle Zahlklasse), wenn man als obere Grenze 2Ω bzw. $2\Omega+1$ wählt.

*Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt
Institut für Geometrie der Technischen Hochschule München*

(Eingegangen am 5. März 1957)

Zur Reduktionstheorie Hilbertscher Räume

Von

HORST LEPTIN

Seit der Veröffentlichung der grundlegenden Arbeit von J. v. NEUMANN über die Reduktionstheorie der Operatoralgebren Hilbertscher Räume [8] sind verschiedene Abhandlungen erschienen, welche z.T. die Theorie auf nicht separable Hilbert-Räume ausdehnen [4], [10], z.T. eine Vereinfachung der v. Neumannschen Untersuchungen im separablen Fall zum Ziele haben [9], [11]. Diese Arbeiten sind entweder speziell auf den separablen Fall zugeschnitten oder benutzen ausgiebig und wesentlich Ergebnisse der Theorie normierter Ringe, Integrations- und Maßtheorie und Darstellungstheorie der Operatoralgebren.

Im Hinblick auf die Wichtigkeit der Reduktionstheorie für die Theorie der Operatoralgebren, die harmonische Analyse, Maßtheorie usw. schien es mir wünschenswert, einen Aufbau zu geben, in dem außer den wichtigsten Tatsachen über Hilbert-Räume und den elementaren Eigenschaften des Daniellschen Integrals keine weiteren Hilfsmittel benutzt werden. Die Grundlage der Reduktionstheorie ist die Theorie der direkten Integrale, bzw. der stetigen direkten Summen Hilbertscher Räume. Aus ihr läßt sich die Reduktionstheorie der Operatoren und Algebren, jedenfalls soweit sie in [4] und [10] durchgeführt ist, verhältnismäßig einfach herleiten. Wir werden in dieser Arbeit deshalb nur die direkten Integrale behandeln und auf die Zerlegung der Operatoren in einer weiteren zurückkommen.

An Voraussetzungen benötigen wir etwa das, was im zweiten Kapitel von [7] über Hilbert-Räume steht, sowie die Theorie des Daniellschen Integrals, soweit sie in den ersten drei Paragraphen des dritten Kapitels von [7] enthalten ist. Darüber hinaus benutzen wir einige Tatsachen über starke Konvergenz von monotonen Folgen vertauschbarer Projektionen, den Satz von TYCHONOFF und, systematisch und ausgiebig, das Zornsche Lemma. Um dieses anwenden zu können, definieren wir in § 1 für summierbare Funktionen eine induktive Ordnung, die wir durch einen sehr simplen Kunstgriff aus der gegebenen erhalten. Mir ist nicht bekannt, ob diese induktiven Ordnungen der meßbaren bzw. summierbaren Funktionen bereits irgendwo definiert oder benutzt worden sind. Um die Nützlichkeit dieser Ordnungen zu zeigen, werden wir mit ihrer Hilfe den Satz von RADON-NIKODYM beweisen. Ferner bildet diese Methode die Seele der Multiplizitätstheorie des vierten Paragraphen.

Der Hauptunterschied zwischen der vorliegenden und den übrigen Darstellungen unseres Gegenstandes besteht darin, daß wir auf eine abstrakte Definition des direkten Integrals Hilbertscher Räume verzichten. Statt dessen

benutzen wir in den Untersuchungen und Sätzen die $\mathfrak{L}^2$ -Räume gewisser meßbarer Teile des Produktraumes $S \times T$ von Maßräumen S und T : Ist X ein meßbarer Teil aus $S \times T$ und T_s die Menge aller $t \in T$ mit $(s, t) \in X$, so sind fast alle T_s meßbar in T und wir können $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X)$ als direktes Integral der $\mathfrak{H}_s = \mathfrak{L}^2(T_s)$ definieren. Der Zusammenhang zwischen dieser und den anderen Definitionen liegt wegen des Satzes von FUBINI auf der Hand und wir brauchen und werden nicht weiter darauf eingehen. Der zur direkten Zerlegung gehörige kommutative Ring beschränkter Operatoren besteht gerade aus den Multiplikationen der Funktionen aus $\mathfrak{L}^2(X)$ mit den meßbaren beschränkten Funktionen auf S , d.h. den Funktionen aus $L^\infty(S)$. Der Maßraum T hat hier nur technische Bedeutung, er wird infolgedessen in dieser Arbeit stets diskret sein. Daß T hier nur formal auftritt, liegt daran, daß wir nach Reduktionen des Hilbert-Raumes bezüglich eines Ringes beschränkter Operatoren fragen. Die Betrachtung von Produkten $S \times T$ führt aber sofort auf das folgende allgemeinere Problem: Gegeben seien zwei kommutative Algebren beschränkter Operatoren **A** und **B**. Wann gibt es Maßräume S und T und einen meßbaren Teil $X \subset S \times T$, so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^2(X)$ und **A** und **B** gerade die zu den Multiplikationen mit den Funktionen aus $L^\infty(S)$ und $L^\infty(T)$ gehörigen Ringe sind? Unsere Formulierung bietet die Möglichkeit einer Theorie direkter Doppelintegrale Hilbertscher Räume, in deren Rahmen eine Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen möglich ist. Natürlich kann man dann auch statt der Doppelintegrale beliebige n -fache Integrale untersuchen, n endlich oder unendlich.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind durchweg nicht neu, sie finden sich, zumindest in äquivalenten Formulierungen, im wesentlichen in [4] und [10], die Multiplizitätstheorie in [6]. Ich hatte den Hauptteil der Arbeit, zu der ich durch das Studium der v. Neumannschen Arbeit angeregt war, fertig, bevor ich die weitere Entwicklung kannte. Hätte ich die Zusammenhänge zwischen den hier gebrachten Ergebnissen, Beweisen und Methoden mit den schon in der Literatur vorhandenen jeweils im einzelnen untersucht und beschrieben, so hätte das zu einer erheblichen Erweiterung des Umfanges der Arbeit und zu fortwährenden Unterbrechungen der Entwicklung der Theorie geführt. Ich möchte deshalb an dieser Stelle noch einmal generell auf [4], [6] und insbesondere auf [10], ferner auf [9] und [11] hinweisen (vgl. auch [1]) und betonen, daß ich bezüglich der Ergebnisse keine Originalität beanspruche.

Nachdem ich diese Arbeit zum Druck eingereicht hatte, teilte mir Herr E. THOMA mit, daß er kurz vorher seine Arbeit [12] zur Publikation gegeben hätte. Er hat in [12] außer der Reduktion des Hilbert-Raumes bezüglich eines Verbandes vertauschbarer Projektionen auch noch die Zerlegung von (einzelnen) Operatoren betrachtet, und zwar für Reduktionen des Raumes mit (im wesentlichen) hyperstoneschen Maßraum (vgl. [2], ch. V, § 5, ex. 14). Ich habe ähnliche Ergebnisse erhalten, jedoch mit gänzlich anderen Methoden; über diese Dinge werde ich in einer Arbeit in den Hamburger Abhandlungen berichten. Auch die hier vorliegende Arbeit unterscheidet sich, wie schon ein erster Blick zeigt, in allen wesentlichen Punkten von THOMAS, so z.B.

schon in der Definition des direkten Integrals. Auf das Buch von HALMOS [6], dessen Multiplizitätstheorie eine der Grundlagen in [12] ist, wurde ich ebenfalls durch Herrn THOMA hingewiesen. Daß sich in methodischen und sachlichen Einzelheiten zwischen [6] und der vorliegenden Arbeit Überschneidungen ergeben (vgl. z.B. [6], § 60, Theorem 1 mit der entsprechenden Stelle in § 4 dieser Arbeit), liegt in der Natur der Dinge. Ähnliche Parallelen finden sich in [4] und [10], sowie in [6] und [10].

Ferner erschien inzwischen die Monographie [3] von DIXMIER. Im zweiten Kapitel behandelt DIXMIER ausführlich die Reduktionstheorie, allerdings nur für Multiplizitäten $\leq \aleph_0$.

Überblick

In § 1 betrachten wir, wie schon gesagt, meßbare Funktionen auf einem abstrakten Maßraum S und definieren hierfür gewisse induktive Ordnungen. Als Anwendung beweisen wir den Satz von RADON-NIKODYM.

§ 2 enthält Allgemeines über $\mathcal{Q}^p$ -Räume und den Beweis der Tatsache, daß die Gesamtheit $\mathcal{P}_S$ der Projektionen P_M des Banach-Raumes $\mathcal{Q}^p(S)$, die den Multiplikationen mit charakteristischen Funktionen χ_M meßbarer Teile $M \subset S$ entsprechen, einen vollständigen Booleschen Verband bilden. Einen solchen vollständigen Verband vertauschbarer Projektionen bezeichnen wir im folgenden stets als *Stamm*. Das Problem besteht darin, für einen Hilbert-Raum zu gegebenem Stamm eine geeignete Darstellung des Raumes als direktes Integral anzugeben. In § 2 wird weiter das Hauptergebnis formuliert und einige Reduktionen des Problems durchgeführt. Die beiden folgenden Paragraphen enthalten dann den Hauptteil der Untersuchung, nämlich

§ 3 die Konstruktion des Maßraumes S und den Nachweis der Isomorphie des gegebenen Stammes $\mathcal{P}$ mit dem zu S gehörigen Stamm $\mathcal{P}_S$ von $\mathcal{Q}^2(S)$.

§ 4 enthält die Multiplizitätstheorie und damit die Lösung des Problems: Zu gegebenem Stamm $\mathcal{P}$ existiert eine stetige direkte Zerlegung in der Form $\xi = \mathcal{Q}^2(X)$ mit meßbarem $X \subset S \times T$ und $\mathcal{P} = \mathcal{P}_S$.

In § 2 wurde gezeigt, daß man bei diskretem T für X eine Art Normaldarstellung angeben kann; in

§ 5 zeigen wir, daß diese Normaldarstellung eindeutig ist, natürlich nur bis auf Äquivalenz der Maßräume S . Aus der Eindeutigkeit enthält man dann die bekannten Unitärinvarianten der kommutativen Operatorringe.

In § 6 zeigen wir schließlich noch, unter Voraussetzung der Spektraltheorie kommutativer normierter Ringe, daß es in jeder Äquivalenzklasse der Maßräume S (genau) einen Stoneschen lokal kompakten Raum gibt, d.h. (im kompakten Fall) einen *perfekten* Maßraum im Sinne von [10], auf dem jede beschränkte meßbare Funktion zu genau einer stetigen äquivalent ist. Damit ist dann weitgehend die Verbindung zu [4] und [10] hergestellt. Auf Einzelheiten gehen wir dabei nicht ein.

Noch einige Bemerkungen zur Terminologie: Den Terminus „isomorph“ benutzen wir mit großer Freiheit, die jeweilige Bedeutung geht stets aus dem

Zusammenhang hervor. Durch $f_n \searrow f$ ($f_n \nearrow f$) drücken wir aus, daß die Folge der reellen Funktionen oder Zahlen f_n monoton von oben (unten) gegen f konvergiert. „positiv“ bedeutet „nicht negativ“. Wir nennen einen Maßraum *diskret*, wenn jeder Punkt das Maß Eins hat, ein diskreter Maßraum ist also durch seine Mächtigkeit bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Charakteristische Funktionen von Mengen $M, X, \dots$ bezeichnen wir durchweg mit $\chi_M, \chi_X, \dots$.

§ 1

Wir betrachten eine Menge S , einen Rieszschen Raum L reellwertiger Funktionen auf S (vgl. [2], ch. II) und ein Integral I auf S , d.h. eine isotone lineare Abbildung von L in die reellen Zahlen, die überdies folgender Stetigkeitsbedingung genügt (vgl. [7], ch. III):

Ist $f_n \in L$, $n = 1, 2, \dots$, und $f_n \searrow 0$, so ist $I(f_n) \searrow 0$.

Das Integral I läßt sich eindeutig fortsetzen auf die Menge $\bar{L}$ der integrierbaren Funktionen. Diese können außer den gewöhnlichen reellen auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen, desgleichen kann I auf $\bar{L} \pm \infty$ werden. In $\bar{L}$ liegt der Rieszsche Raum L^1 der summierbaren Funktionen, d.h. der Funktionen aus $\bar{L}$ mit endlichem Integralwert. Mit $\bar{L}_+$, bzw. L_+^1 bezeichnen wir die Menge der positiven Funktionen aus $\bar{L}$, bzw. L^1 . Jedes $f \in \bar{L}$ ist Differenz $f = f^+ - f^-$ mit $f^+, f^- \in \bar{L}_+$ und f^+ oder f^- aus L_+^1 . Liegt die charakteristische Funktion χ_A des Teiles $A \subset S$ in $\bar{L}$, so nennen wir A integrierbar. Das System $\mathcal{M} = \mathcal{M}_S$ aller integrierbaren Teile von S bildet einen vollständigen σ -Ring: Mit abzählbar vielen A_i liegen auch $\cup A_i$ und $\cap A_i$ in $\mathcal{M}$, mit A und B ferner die Differenzmenge $A - B$. Ist $A \in \mathcal{M}$, so ist durch $m(A) = I(\chi_A)$ ein volladditives positives Maß m auf $\mathcal{M}$ definiert, das auf dem System $\mathcal{M}^0 = \mathcal{M}_S^0$ der Nullmengen verschwindet. Liegt N in $\mathcal{M}^0$, so auch jeder Teil von N . Wir wollen stets voraussetzen, daß mit f auch $f \cap 1 = \inf \{f, 1\}$ (punktweises inf.) in L liegt. Das bedeutet im wesentlichen, daß I das in üblicher Weise durch m definierte Integral ist (vgl. [7]). Jedes $A \in \mathcal{M}$ ist dann die Vereinigung abzählbar vieler $A_i \in \mathcal{M}$ mit endlichem Maß $m(A_i)$, (d.h. $\mathcal{M}$ ist total σ -finit im Sinne von [5]).

Die Menge $\bar{L}$ ist ein Verband, der in der gewöhnlichen Ordnung überdies σ -induktiv ist (besser $\mathfrak{S}_0$ -induktiv): Das Infimum und das Supremum jeder abzählbaren Kette aus $\bar{L}$ liegt wieder in $\bar{L}$. Dagegen ist $\bar{L}$ im allgemeinen nicht induktiv, so daß man z.B. nicht das Lemma von ZORN anwenden kann. Wir werden nun mit einem einfachen Trick durch Vergrößerung der Ordnung $\bar{L}$ zu einer induktiv geordneten Menge machen.

Sei $M = (M, <)$ eine durch „ $<$ “ σ -induktiv geordnete Menge und I eine isotone Abbildung von M in die Menge der reellen Zahlen, einschließlich der Werte $+\infty$ und $-\infty$. Wir definieren in M eine Ordnung „ $\triangleleft$ “ wie folgt:

(α) $x \triangleleft y$ bedeute $x < y$ und $I(x) < I(y)$.

(1.1) Die durch (α) in M definierte Ordnung ist induktiv.

Der Beweis ist äußerst einfach: Sei $\kappa = \{x\}$ eine Kette aus $(M, \triangleleft)$. Die neue Ordnung ist gerade so definiert, daß die Ketten κ und $I(\kappa) = \{I(x)\}_{x \in \kappa}$ isomorph sind. Ist nun $I(\kappa') = \{I(x_i)\}_{i=1,2,\dots}$ eine konfinale Teilfolge in $I(\kappa)$, so muß $\kappa' = \{x_i\}$ in κ konfinal sein. Da $(M, \triangleleft)$ nach Voraussetzung σ -induktiv ist, liegt $\sup \kappa'$ in M . Da κ' konfinal ist, gilt also $\sup \kappa = \sup \kappa' \in M$.

Wir können dieses Prinzip auf die Mengen $\bar{L}$, $\bar{L}_+$ und $\mathcal{M}$ anwenden, ferner z.B. auf den Teil aller $f \in L^1$ mit $\alpha \leq I(f) \leq \beta$ mit festen α und β . Zwei Funktionen aus $\bar{L}$, die sich um eine Nullfunktion unterscheiden, sind unvergleichbar oder identisch. Ferner sind alle nicht summierbaren $f \in \bar{L}_+$ (d.h. alle positiven f mit $I(f) = \infty$) unvergleichbar. Daraus folgt, daß $(\bar{L}, \triangleleft)$ kein Verband mehr ist. Aber auch $(L^1, \triangleleft)$ ist, wie man sofort sieht, kein Verband mehr. Für jede Kette $\kappa \in (\bar{L}, \triangleleft)$ und jedes $x \in L^1_+$ gilt offenbar $\sup_{f \in \kappa} I(xf) = I(x \sup \kappa)$. Wir wollen nun die Nützlichkeit unserer Definition in einem kurzen Beweis des Satzes von RADON-NIKODYM erweisen.

(1.2) Zu jeder positiven, volladditiven auf $\mathcal{M}$ definierten und gleichmäßig beschränkten Mengenfunktion m , welche auf $\mathcal{M}^0$ verschwindet, existiert ein $f \in L^1_+$, mit welchem für alle $X \in \mathcal{M}$ gilt:

$$m(X) = I(f\chi_X).$$

Dieses f ist bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir wählen ein maximales $f \in (\bar{L}_+, \triangleleft)$ mit $I(f\chi_X) \leq m(X)$ für alle $X \in \mathcal{M}$ und zeigen, daß für dieses f die Behauptung von (1.2) gilt. Zunächst liegt f in L^1_+ , denn mit geeignetem positivem C gilt $I(f\chi_X) \leq m(X) \leq C$ gleichmäßig in X . Wir wollen zeigen, daß die positive Mengenfunktion $n(X) = m(X) - I(f\chi_X)$ auf $\mathcal{M}$ verschwindet. Falls n nicht verschwindet, gibt es ein $M \in \mathcal{M}$ mit $0 < n(M)$ und $I(\chi_M) < \infty$. Da n auf $\mathcal{M}^0$ verschwindet, folgt $I(\chi_M) > 0$, wir können also $n(M) = 2\nu I(\chi_M)$ setzen. Nun sei W maximal aus $(\mathcal{M}, \triangleleft)$ mit $n(W) \leq \nu I(\chi_W)$ und $W \subset M$. Sei $W' = M - W$. Wegen $n(M) = 2\nu I(\chi_M)$ ist $n(W') > 0$, also $W' \notin \mathcal{M}^0$. Für $U \subset W'$, $U \in \mathcal{M}$ gilt ferner $\nu I(\chi_U) \leq n(U)$. Das ist trivial für $U \in \mathcal{M}^0$ und folgt für die übrigen U aus der Maximalität von W . Setzen wir $g = \nu\chi_{W'}$, so ist $f \triangleleft f + g$ und für $X \in \mathcal{M}$ gilt

$$I(g\chi_X) = \nu I(\chi_{X \cap W'}) \leq n(X \cap W') \leq n(X),$$

also

$$I((f + g)\chi_X) \leq I(f\chi_X) + n(X) = m(X),$$

was der Maximalität von f widerspricht. Folglich ist $n = 0$, d.h. $m(X) = I(f\chi_X)$. Die Eindeutigkeit von f folgt wie üblich. Wir bemerken noch, daß dieser Beweis keine Reduktion auf endliches I benutzt.

Besondere Bedeutung haben für uns die Maßräume, die der folgenden Bedingung genügen:

(Φ) $\mathcal{M}$ enthält ein Teilsystem Φ paarweise disjunkter Teile $S_\mu \subset S$, derart, daß

1. jedes $X \in \mathcal{M}$ mit höchstens abzählbar vielen $S_\mu \in \Phi$ einen nicht leeren Durchschnitt hat und

2. der Durchschnitt $X \cap (S - \bigcup_\mu S_\mu)$ für jedes $X \in \mathcal{M}$ eine Nullmenge ist.

Wir nennen solch ein System Φ eine meßbare Zerlegung von S .

Ist S lokal kompakt und I ein Radonsches Integral, so ist die Bedingung (Φ) stets erfüllt, siehe [2], ch. V, § 1, n° 4. Wir setzen im folgenden immer voraus, daß der Maßraum S meßbare Zerlegungen besitzt. Offenbar kann man dann statt S ebensogut $\bigcup_\mu S_\mu$ als Ausgangsmenge nehmen, d.h. man kann, jedenfalls im Falle abstrakter Maßräume, annehmen, daß S die Vereinigung paarweise fremder integrierbarer Mengen S_μ ist und daß jedes integrierbare M in der Vereinigung höchstens abzählbar vieler S_μ liegt. Weiter darf man annehmen, daß die S_μ sogar summierbar sind, d.h. daß $m(S_\mu) < \infty$ ist für alle μ .

Außer $\bar{L}$ und L^1 betrachten wir noch das System $\mathcal{A}$ der meßbaren Funktionen auf S . Dabei heißt f meßbar, wenn für jedes $X \in \mathcal{M}$ das Produkt $f\chi_X$ integrierbar ist. Offenbar genügt es, daß sämtliche $f_\mu = f\chi_{S_\mu}$, $S_\mu \in \Phi$, integrierbar sind. Umgekehrt: Sei auf jedem S_μ eine Funktion $f_\mu \in \bar{L}_+$ definiert. Für alle $s \notin S_\mu$ sei $f_\mu(s) = 0$. Dann gehört $f = \sum_\mu f_\mu$ zu $\mathcal{A}$, genauer zum System $\mathcal{A}_+$ der positiven Funktionen aus $\mathcal{A}$. Ein Teil $M \subset S$ heißt meßbar, wenn χ_M in $\mathcal{A}_+$ liegt, d.h. wenn alle $M \cap S_\mu$ in $\mathcal{M}$ liegen. Das System der meßbaren Mengen sei $\mathcal{L}$.

Wir können auch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}$ induktiv ordnen. Es genügt, dieses für $\mathcal{A}$ durchzuführen: Sind f und g aus $\mathcal{A}$, so bedeute $f \trianglelefteq g$, daß $f\chi_{S_\mu} \trianglelefteq g\chi_{S_\mu}$ ist im Sinne von $(\bar{L}, \trianglelefteq)$ für alle $S_\mu \in \Phi$. Es ist klar, daß auch diese Ordnungen, die von Φ abhängen, induktiv sind. Wir bemerken, daß die Ordnungen in $(\bar{L}, \trianglelefteq)$ und in $\bar{L}$ als geordneter Teil von $(\mathcal{A}, \Phi, \trianglelefteq)$ im allgemeinen nicht übereinstimmen!

Wir können in $\mathcal{A}$ eine uneigentliche Seminorm definieren:

$$(\beta) \quad |f|_\infty = \sup_{X \in \mathcal{M}} I(|f|\chi_X)/m(X), \quad X \notin \mathcal{M}^0.$$

Alle $f \in \mathcal{A}$ mit $|f|_\infty < \infty$ bilden einen Vektorraum $L^\infty(S)$, der den Unterraum $N(S)$ aller f mit $|f|_\infty = 0$ enthält. Der Faktorraum $\mathfrak{L}^\infty(S) = L^\infty(S)/N(S)$ ist bekanntlich ein reeller Banach-Raum, sogar eine kommutative halbeinfache Banach-Algebra. Wie üblich gewinnt man aus (1.2) den etwas allgemeineren Satz

(1.3) Ist m ein positives, volladditives, endlichwertiges Maß auf $\mathcal{M}$, das auf $\mathcal{M}^0$ verschwindet, so existiert ein $f \in \mathcal{A}_+$ mit $m(X) = I(f\chi_X)$ für alle $X \in \mathcal{M}$. Gilt $m(X) \leq C I(\chi_X)$ für alle $X \in \mathcal{M}$, so liegt f in $L^\infty(S)$ und es ist $|f|_\infty \leq C$.

Übrigens kann man (1.3) mit Hilfe der Ordnung in $(\mathcal{A}, \Phi, \trianglelefteq)$ genau wie (1.2) beweisen.

§ 2

Sei p eine reelle Zahl ≥ 1 . Die Menge aller komplexwertigen Funktionen $f = g + ih$ auf S mit reellen Funktionen $g, h \in \bar{L}$, für welche $|f|^p = (g^2 + h^2)^{p/2}$ in L_+^1 liegt, bilden einen Vektorraum L^p , in dem durch $|f|_p = I(|f|^p)^{1/p}$ eine Seminorm definiert ist. Ist N^p der Unterraum aller $f \in L^p$ mit $|f|_p = 0$, so ist der Faktorraum $\mathfrak{Q}^p(S) = L^p/N^p$ bekanntlich ein komplexer Banach-Raum. Den in § 1 eingeführten Raum $\mathfrak{Q}^\infty(S)$ betrachten wir von nun an auch als komplex. Die entsprechenden reellen Räume bezeichnen wir mit ${}^r\mathfrak{Q}^p(S)$, $1 \leq p \leq \infty$. Ist $f = g + ih \in \mathfrak{Q}^\infty$, so sind $g, h \in {}^r\mathfrak{Q}^\infty$ und es ist $|f|_\infty = |(g^2 + h^2)^{1/2}|_\infty$. Wir bezeichnen durchweg die Elemente aus $\mathfrak{Q}^p$ durch die sie repräsentierenden Funktionen.

Ist neben S ein weiterer Maßraum T gegeben, so können wir den Produkt-Raum $S \times T$ bilden und hierzu die Banach-Räume $\mathfrak{Q}^p(S \times T)$ betrachten. Liegt x in $\mathfrak{Q}^p(S \times T)$ und f in $L^\infty(S)$, so liegt die Funktion $fx: (s, t) \rightarrow f(s)x(s, t)$ wieder in $\mathfrak{Q}^p(S \times T)$. Die Abbildung $x \rightarrow fx$ ist also ein beschränkter linearer Operator A_f von $\mathfrak{Q}^p(S \times T)$. Man erkennt leicht, daß die Operatornorm $|A_f| = |f|_\infty$ ist. In dieser Weise ist $\mathfrak{Q}^\infty(S)$ also isomorph dargestellt als kommutative gleichmäßig abgeschlossene Algebra beschränkter Operatoren von $\mathfrak{Q}^p(S \times T)$. Wir bezeichnen diese Algebra mit $\mathbf{A}_S$. Insbesondere ist $\mathbf{A}_S$ eine Operatoralgebra von $\mathfrak{Q}^p(S)$.

(2.1) $\mathbf{A}_S$ ist eine maximale kommutative Algebra beschränkter Operatoren von $\mathfrak{Q}^p(S)$, $p < \infty$.

Beweis: Sei U ein beschränkter mit $\mathbf{A}_S$ elementweise vertauschbarer Operator. Ist Φ eine meßbare Zerlegung von S und $\chi_\mu = \chi_{S_\mu}$ für $S_\mu \in \Phi$, so ist $U\chi_\mu = u_\mu(s) \in \mathfrak{Q}^p(S)$ für jedes μ und $u = \sum_\mu u_\mu \in \mathbf{1}$. Ist q die Operatornorm von U , so ist die Menge N aller $s \in S$ mit $q < q + \varepsilon \leq |u(s)|$ meßbar. Setzen wir $\varphi = A_{\chi_N} \chi_\mu = \chi_{N \cap S_\mu}$, so ist $U\varphi = A_{\chi_N} U\chi_\mu = u\varphi$ und es gilt

$$(q + \varepsilon) |\varphi|_p = I(|(q + \varepsilon) \varphi|^p)^{1/p} \leq I(|u(s) \varphi|^p)^{1/p} = |U\varphi|_p \leq q |\varphi|_p$$

also $|\varphi|_p = |\chi_{N \cap S_\mu}|_p = 0$, d.h. aber $|u|_\infty \leq q + \varepsilon$, also $|u|_\infty \leq q$. Folglich ist $u \in \mathfrak{Q}^\infty(S)$ und $U\chi_M = u\chi_M = A_u \chi_M$ für alle $M \in \mathcal{M}$. Da die Linearkombinationen dieser χ_M in $\mathfrak{Q}^p$ dicht liegen, folgt $U = A_u \in \mathbf{A}_S$.

Der Ring $\mathfrak{Q}^\infty(S)$ wird von den charakteristischen Funktionen χ_M der $M \in \mathcal{L}$ erzeugt, der Ring $\mathbf{A}_S$ dementsprechend vom System $\mathcal{P}_S$ der in $\mathbf{A}_S$ liegenden Projektionen $P = P_M$, die gerade den χ_M entsprechen.

(2.2) $\mathcal{P}_S$ ist ein vollständiger Boolescher Verband vertauschbarer Projektionen.

Es ist lediglich die Vollständigkeit von $\mathcal{P}_S$ zu zeigen. Sei κ eine Kette aus $\mathcal{P}_S$ und λ eine maximale Kette aus $(\mathcal{L}, \Phi, \triangleleft)$, für die $\kappa' = \{P_M\}_{M \in \lambda}$ eine Teilkette aus κ ist. Es ist $M' = \sup \lambda \in \mathcal{L}$. Ist κ' konfinal in κ , so ist $\sup \kappa = \sup \kappa' = P_{M'} \in \mathcal{P}_S$. Andernfalls gibt es ein $P_X \in \kappa$ mit $P_M < P_X$ für alle $M \in \lambda$, also $P_{M'} \leq P_X$, wir können deshalb $M' < X$ annehmen. Setzen wir $X_\mu = M' \cap S_\mu$ falls $P_{M'} P_{S_\mu} = P_X P_{S_\mu}$ ist und $X_\mu = X \cap S_\mu$ sonst, so ist $X' = \cup X_\mu \supseteq M' \supset M$ für alle $M \in \lambda$ und $P_{X'} = P_X \in \kappa$, λ wäre also nicht maximal.

Uns interessiert in dieser Arbeit hauptsächlich die Frage, wie weit sich der bisher in diesem Paragraphen beschriebene Sachverhalt umkehren läßt, also das Problem, ob sich zu einem Banach-Raum $\mathfrak{B}$, für den ein vollständiger Boolescher Verband vertauschbarer Projektionen $\mathcal{P}$ gegeben ist, Maßräume S und T finden lassen, derart, daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{Q}^b(S \times T)$ und $\mathcal{P} = \mathcal{P}_S$ ist. Natürlich ist klar, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathcal{P}$ bestimmten Bedingungen genügen müssen, z. B. muß die Operatornorm der von Null verschiedenen $P \in \mathcal{P}$ gleich Eins sein, ferner muß $\mathfrak{B}$ sich überhaupt als $\mathfrak{Q}^b$ -Raum darstellen lassen. *Aus diesem Grunde werden wir uns im folgenden auf Hilbert-Räume beschränken und voraussetzen, daß die Projektionen stets selbstadjungiert sind.* Daß auch diese Voraussetzungen noch nicht genügen, zeigt folgende Überlegung: Ist X ein meßbarer Teil aus $S \times T$ und $X \cap (M \times T)$ nur für die $M \in \mathcal{M}_S^0$ eine Nullmenge, so ist die Projektion P_X von $\mathfrak{Q}^2(S \times T)$ auf $\mathfrak{Q}^2(X)$ mit $\mathcal{P}_S$ elementweise vertauschbar und $\mathcal{P} = P_X \mathcal{P}_S = \{P_X \cap (M \times T)\}_{M \in \mathcal{M}_S}$ ist zu $\mathcal{P}_S$ isomorph; deshalb ist $\mathcal{P}$ ein vollständiger Boolescher Verband von Projektionen des Raumes $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}^2(X)$. Im allgemeinen wird sich $\mathfrak{H}$ nicht als $\mathfrak{Q}^2(S_1 \times T_1)$ mit $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{S_1}$ darstellen lassen. Deshalb müssen wir die allgemeinere Darstellung von $\mathfrak{H}$ als $\mathfrak{Q}^2(X)$ mit $X \subset S \times T$ und $\mathcal{P} = P_X \mathcal{P}_S$ ebenfalls als mögliche Lösungen unseres Problems zulassen. Die folgenden Definitionen sollen die Formulierungen vereinfachen. Wir betrachten von nun an nur noch Hilbert-Räume, insbesondere sei $\mathfrak{H}$ stets ein Hilbert-Raum. Ein Stamm von $\mathfrak{H}$ ist ein von Null verschiedener vollständiger Boolescher Verband vertauschbarer Projektionen von $\mathfrak{H}$. Das Symbol $\mathcal{P}$, ohne oder mit Indizes, bezeichne stets Stämme.

Der Stamm $\mathcal{P}$ ist die Summe der Stämme $\mathcal{P}_\mu$, wenn alle $\mathcal{P}_\mu$ paarweise orthogonal sind und $\mathcal{P}$ der kleinste alle $\mathcal{P}_\mu$ enthaltende Stamm ist. In Zeichen: $\mathcal{P} = \sum_\mu \mathcal{P}_\mu$. Ist E_μ die maximale Projektion aus $\mathcal{P}_\mu$ und E die aus $\mathcal{P}$, so ist $E = \sum_\mu E_\mu$ (starke Konvergenz). $\mathcal{P}$ besteht genau aus allen Summen $P = \sum_\mu P_\mu$ mit $P_\mu = E_\mu P \in \mathcal{P}_\mu$. Der Zerlegung von $\mathcal{P}$ entspricht die Darstellung von $\mathfrak{H}_{\mathcal{P}} = E \mathfrak{H}$ als direkte Summe der $\mathfrak{H}_\mu = E_\mu \mathfrak{H}$. Ist umgekehrt die maximale Projektion $E \in \mathcal{P}$ starke Summe paarweise orthogonaler $E_\mu \in \mathcal{P}$, so ist $\mathcal{P}$ die Summe der Teilstämme $\mathcal{P}_\mu = E_\mu \mathcal{P}$. Wir machen von diesen elementaren und bekannten Eigenschaften der Stämme stets Gebrauch, ohne sie jeweils im einzelnen zu erwähnen.

Ein Atom eines Stammes ist eine minimale Projektion $P \neq 0$.

Ein atomarer Stamm besteht aus genau zwei Projektionen.

Ein diskreter Stamm ist Summe atomarer Stämme.

Ein dichter Stamm enthält keine Atome.

Ein dichter Stamm ist auch im ordnungstheoretischen Sinne dicht: Sind $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ und $P_1 < P_2$, so gibt es ein $Q \in \mathcal{P}$ mit $0 < Q < P_2 - P_1$, also $P_1 < P_1 + Q < P_2$.

¹⁾ Mit $A\mathfrak{M}$ bezeichnen wir stets das Bild der Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ bei Anwendung des Operators A .

²⁾ Ist $\mathcal{P}$ ein Stamm und P_0 eine mit $\mathcal{P}$ vertauschbare Projektion, so bezeichnen wir den Stamm aller $P_0 P$, $P \in \mathcal{P}$, stets mit $P_0 \mathcal{P}$.

(2.3) Jeder Stamm $\mathcal{P}$ ist Summe eines dichten und eines diskreten Stammes.

Die Atome aus $\mathcal{P}$ sind paarweise orthogonal, wir können also ihre Summe E_1 bilden. Ist $E_2 = E - E_1$, E maximal in $\mathcal{P}$, so ist $\mathcal{P}_1 = E_1\mathcal{P}$ diskret, $\mathcal{P}_2 = E_2\mathcal{P}$ offensichtlich dicht und $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$.

Nun seien S und T Maßräume. Wir betrachten im Produktraum $S \times T$ nur solche meßbaren Teile X , für welche die Teilmengen $X \cap (M \times T)$ nur für die $M \in \mathcal{M}_S^0$ Nullmengen sind. Besonders wichtige Teile dieser Art sind die Treppen: Ein Teilraum $X \subset S \times T$ heißt eine *Treppe*, wenn es eine meßbare Zerlegung Φ von S gibt, derart daß $X = \bigcup_{S_\mu \in \Phi} S_\mu \times T_\mu$ ist und die T_μ eine Kette meßbarer Nicht-Nullmengen von T bilden. Für eine Treppe gilt offenbar $\mathfrak{Q}^2(X) = \sum_\mu \mathfrak{Q}^2(S_\mu \times T_\mu)$.

Wir hatten in $\mathfrak{Q}^2(S \times T)$ bereits den Stamm $\mathcal{P}_S$ definiert. Ist $X \subset S \times T$ meßbar und P_X die Projektion von $\mathfrak{Q}^2(S \times T)$ auf $\mathfrak{Q}^2(X) = \mathfrak{H}$, so ist $P_X\mathcal{P}_S = \mathcal{P}$ ein durch S , T und X eindeutig bestimmter zu $\mathcal{P}_S$ isomorpher Stamm, den wir den zu S gehörigen Stamm oder kürzer den S -Stamm von $\mathfrak{H}$ nennen und wieder mit $\mathcal{P}_S$ bezeichnen. Wir können nun unser Hauptergebnis formulieren:

Ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathcal{P}$ ein Stamm, der den Einheitsoperator E von $\mathfrak{H}$ enthält, so gibt es einen Maßraum S , einen diskreten Maßraum D und eine Treppe X in $S \times D$, derart, daß $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{Q}^2(X)$ ist und sich bei diesem Isomorphismus $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_S$ entsprechen. Das heißt: Identifiziert man $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{Q}^2(X)$, so ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}_S$.

Natürlich ist die Bedingung $E \in \mathcal{P}$ keine echte Einschränkung. Dagegen können wir die Bedingung der Vollständigkeit des Stammes $\mathcal{P}$ noch etwas abschwächen. Statt vorauszusetzen, daß mit jeder Kette κ auch stets $\sup \kappa$ und $\inf \kappa$ zu $\mathcal{P}$ gehört, genügt es zu verlangen, daß stets $\inf \kappa$ zu $\mathcal{P}$ gehört und daß für jedes abzählbare κ auch $\sup \kappa$ zu $\mathcal{P}$ gehört. Dieser Bedingung genügt z. B. das System $\mathcal{P}_0$ aller $P_M \in \mathcal{P}_S$ mit $M \in \mathcal{M}_S$. Man kann leicht sehen, daß jeder Verband $\mathcal{P}$ vertauschbarer Projektionen, welcher dieser σ -Vollständigkeitsbedingung genügt, einen Stamm $\mathcal{P}_S$ erzeugt und daß das System $\mathcal{P}_0$ der P_M , $M \in \mathcal{M}_S$, in $\mathcal{P}$ eindeutig bestimmt ist als Menge aller $P \in \mathcal{P}$, die sich als höchstens abzählbare Summe $P = \sum_i P_i$ mit orthogonalen $P_i \in \mathcal{P}$ darstellen lassen. Die Bedingung der Vollständigkeit bei Stämmen ist also letzten Endes auch keine wesentliche Einschränkung. Andererseits bringt sie naturgemäß viele technische Vereinfachungen mit sich.

Wir können das Problem nun leicht noch weiter reduzieren. Ist der Maßraum D diskret, so hängt $\mathfrak{Q}^2(S \times D)$ offenbar nur von S und der Mächtigkeit von D ab; ist also $X = \bigcup (S_\mu \times D_\mu)$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}^2(X) = \sum \mathfrak{Q}^2(S_\mu \times D_\mu)$, so können wir alle D_μ der Mächtigkeit α mit einem diskreten Maßraum D_α dieser Mächtigkeit identifizieren. Die Vereinigung S_α der entsprechenden S_μ ist ein meßbarer Teil aus S . Es ist dann $\mathfrak{H} = \sum_\alpha \mathfrak{Q}^2(S_\alpha \times D_\alpha) = \mathfrak{Q}^2(X')$, wobei nun $X' = \bigcup S_\alpha \times D_\alpha$ ist. Das System der D_α können wir dabei als Kette aus Teilmengen der Mächtigkeit α eines genügend großen diskreten Maßraumes betrachten. In $\mathfrak{Q}^2(S \times D_\alpha)$ hat D_α natürlich nur formale Bedeutung, in Wirklichkeit handelt es sich bei

diesem Hilbert-Raum um die gewöhnliche direkte Summe von α zu $\mathfrak{Q}^2(S)$ isomorphen Summanden. Wir führen deshalb die folgende kürzere Schreibweise ein:

$$\mathfrak{Q}^2(S \times D_\alpha) = \alpha \mathfrak{Q}^2(S).$$

Hiermit können wir dann auch $\mathfrak{H} = \sum_\alpha \alpha \mathfrak{Q}^2(S_\alpha)$ schreiben.

S ist die punktfremde Vereinigung der meßbaren Teile S_α , die aber im allgemeinen nicht mehr integrierbar sind. Ist $\mathfrak{H} = \sum_\lambda \mathfrak{H}^\lambda$ und gilt $\mathfrak{H}^\lambda = \sum_\alpha \alpha \mathfrak{Q}^2(S_\alpha^\lambda)$ für jedes λ , so können wir den Maßraum S als punktfremde Vereinigung aller S_α^λ definieren. Mit $S_\alpha = \bigcup_\lambda S_\alpha^\lambda$ ist dann offensichtlich $\mathfrak{H} = \sum_\alpha \alpha \mathfrak{Q}^2(S_\alpha)$. Ferner gilt für die Stämme: $\mathcal{P}_S = \sum \mathcal{P}_{S^\lambda}$, wobei $S^\lambda = \bigcup_\alpha S_\alpha^\lambda$ ist. Daraus folgt, daß unser Problem für einen Stamm $\mathcal{P}$ gelöst ist, wenn wir $\mathcal{P} = \sum \mathcal{P}_\lambda$ haben und für jedes $\mathcal{P}_\lambda$ das Problem gelöst ist. Wegen (2.3) ist das Problem deshalb auf dichte und atomare Stämme reduziert. Für atomare Stämme ist die Lösung trivial: Ist $\mathcal{P} = \{0, E\}$, so ist $\mathfrak{H} = \alpha \mathfrak{Q}^2(D_1)$, wobei α die Dimension von $\mathfrak{H}$ und D_1 ein einpunktiger diskreter Maßraum ist.

Wir nennen einen Stamm *zyklisch*, wenn $\mathfrak{H}$ ein Element z enthält, derart, daß genau für die maximale Projektion $E \in \mathcal{P}$ die Gleichung $Ez = z$ gilt. M.a.W.: $\mathcal{P}$ heißt *zyklisch*, wenn ein z existiert mit $Ez = z$ und $Pz \neq z, |Pz| < |z|$ für alle von E verschiedenen $P \in \mathcal{P}$.

(2.4) Jeder Stamm ist Summe zyklischer Stämme.

Sei $\{\mathcal{P}_\mu\}$ ein maximales System paarweise orthogonaler zyklischer Stämme und $\mathcal{P}' = \sum_\mu \mathcal{P}_\mu$ ihre Summe. Sei E' die maximale Projektion aus $\mathcal{P}'$ und E die aus $\mathcal{P}$. Ist $E'' = E - E' \neq 0$, so gibt es ein $x \in \mathfrak{H}$ mit $E''x = z \neq 0$. Ist $P \in \mathcal{P}$ minimal mit $Pz = z$, so ist der Stamm $P\mathcal{P}$ zyklisch und wegen $P \leq E''$, also $PE' = 0$, zu allen $\mathcal{P}_\mu$ orthogonal. Dieser Widerspruch zeigt, daß $E'' = 0$, also $E = E'$ und somit $\mathcal{P} = \sum_\mu \mathcal{P}_\mu$ sein muß.

§ 3

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen haben das Problem auf den folgenden Fall reduziert: Es ist ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ gegeben und ein zyklischer dichter Stamm $\mathcal{P}$, der den Einheitsoperator E enthält. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

(3.1) $\mathfrak{H}$ enthält einen $\mathcal{P}$ -invarianten Unterraum $\mathfrak{H}_1$ mit folgenden Eigenschaften: Der von $\mathcal{P}$ in $\mathfrak{H}_1$ induzierte Stamm $\mathcal{P}_1$ ist zu $\mathcal{P}$ isomorph. Es existiert ein Maßraum $S = (S, I)$ und ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{Q}^2(S)$, der einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{P}_1$ (und damit auch $\mathcal{P}$) und $\mathcal{P}_S$ induziert.

Es genügt, (3.1) mit ${}^r\mathfrak{Q}^2(S)$ statt mit $\mathfrak{Q}^2(S)$ zu beweisen.

$\mathcal{P}$ ist zyklisch, d.h. $\mathfrak{H}$ enthält ein Element e vom Betrage 1 mit $|Pe| < 1$ für alle von E verschiedenen $P \in \mathcal{P}$. Der von den reellen Linearkombinationen der Pe , $P \in \mathcal{P}$, erzeugte Hilbert-Raum $\mathfrak{H}_1$ ist $\mathcal{P}$ -invariant. Wir zeigen

zunächst, daß der von $\mathcal{P}$ in $\mathfrak{S}_1$ induzierte Stamm $\mathcal{P}_1$ mit $\mathcal{P}$ isomorph ist. Das folgt aus

(3.2) Für die $P \in \mathcal{P}$ ist die Beziehung $P \leftrightarrow Pe$ eineindeutig.

Sind $P, Q \in \mathcal{P}$ und ist $Pe = Qe$, so folgt $(E - (P - PQ))e = e$, also $E - (P - PQ) = E$, d.h. $P = PQ$ und genauso $Q = PQ$, also $P = Q$.

Statt $\mathcal{P}_1$ schreiben wir nun wieder $\mathcal{P}$. Wir definieren mit Hilfe des Elementes e eine lineare Abbildung l des Ringes der beschränkten Operatoren A von $\mathfrak{S}$ durch die Formel

$$l(A) = (Ae, e).$$

l liefert eine isotone Abbildung von $\mathcal{P}$ in das abgeschlossene Intervall $\mathfrak{S} = [0, 1]$.

(3.3) l bildet maximale Ketten aus $\mathcal{P}$ auf $\mathfrak{S}$ ab.

Da $\mathcal{P}$ dicht und vollständig ist, muß eine maximale Kette $\kappa \in \mathcal{P}$ ebenfalls dicht und vollständig sein, außerdem muß 0 und E in κ liegen. Weil l isoton, schwach stetig und auf $\mathcal{P}$ wegen (3.2) eineindeutig ist, muß $l(\kappa)$ ein abgeschlossener dichter Teil von $\mathfrak{S}$ sein, der 0 und 1 enthält. Das geht nur für $l(\kappa) = \mathfrak{S}$.

Wir wählen nun ein System Ω maximaler Ketten κ derart, daß jedes $P \in \mathcal{P}$ in einem $\kappa \in \Omega$ liegt. Das ist möglich, da sicher jedes P in einer Kette und folglich auch in einer maximalen Kette liegt. Für jedes $\kappa \in \Omega$ ist $l(\kappa) = \mathfrak{S}_\kappa$ nach (3.3) gleich $\mathfrak{S}$. Wir wollen jedoch die einzelnen $\mathfrak{S}_\kappa$ unterscheiden und setzen

$$S = \prod_{\kappa \in \Omega} \mathfrak{S}_\kappa = \mathfrak{S}^\Omega.$$

Dieses Tychonoffsche Produkt ist ein kompakter Raum. Wir betrachten Punktepaare $\alpha = \{\alpha_\kappa\}$ und $\beta = \{\beta_\kappa\}$ aus S mit folgenden Eigenschaften: 1. Fast alle $\alpha_\kappa = 0$. 2. Fast alle $\beta_\kappa = 1$. 3. $\alpha_\kappa \leq \beta_\kappa$ für alle $\kappa \in \Omega$. Jedem solchen Paar ordnen wir einen Quader $q = q(\alpha, \beta)$ zu. Darunter verstehen wir die Menge aller Punkte $\xi = \{\xi_\kappa\} \in S$ mit $\alpha_\kappa \leq \xi_\kappa \leq \beta_\kappa$ für alle $\kappa \in \Omega$. Das Innere eines Quaders q , d.h. die Menge aller ξ mit $\alpha_\kappa < \xi_\kappa < \beta_\kappa$, bezeichnen wir mit q^0 . Ist q^0 leer, so nennen wir q entartet. Der Durchschnitt endlich vieler Quader ist wieder ein Quader. Sind q und q_i endlich viele Quader, so bedeute $q = \sum q_i$, daß $q = \cup q_i$ und $q_i^0 \cap q_j^0$ leer ist für $i \neq j$. Zu endlich vielen Quadern q_k gibt es immer eine Menge endlich vieler Quader q'_i , derart, daß $q_k = \sum' q'_i$ ist, wobei in $\sum'$ über geeignete q_i zu summieren ist. Wir können auch schreiben

$$(v) \quad q_k = \sum \varepsilon_{ki} q'_i$$

mit $\varepsilon_{ki} = 1$ falls $q'_i < q_k$ und $\varepsilon_{ki} = 0$ sonst.

Wir bezeichnen mit L den Modul, der von den charakteristischen Funktionen χ_q der Quader über den reellen Zahlen erzeugt wird. In L liegt der Modul L_0 der von den χ_q mit entarteten q erzeugten Funktionen. Wegen (3.3) gibt es zu jedem $\xi \in \mathfrak{S}_\kappa$ genau ein $P \in \kappa$ mit $l(P) = \xi$. Wir bezeichnen dieses P mit P_ξ^κ . Nun ordnen wir jedem Quader $q = q(\alpha, \beta)$ eine Projektion $P_q \in \mathcal{P}$ zu durch

$$P_q = \prod_{\kappa} (P_{\beta_\kappa}^\kappa - P_{\alpha_\kappa}^\kappa).$$

Für entartete q ist offenbar $P_q = 0$. Ferner gelten die Formeln

$$(\delta_1) \quad P_{\Sigma q_i} = \sum P_{q_i},$$

$$(\delta_2) \quad P_{q \cap q_i} = \prod P_{q_i}.$$

(δ_2) folgt unmittelbar aus der Definition. (δ_1) kann man etwa zeigen, indem man $q = \sum q_i$ durch die endlich vielen die q_i begrenzenden Hyperebenen weiter in Quader q'_j zerlegt. Hierbei werden die q_i in entsprechender Weise zerlegt. Das folgende Schema verdeutlicht, wie diese Zerlegung gemeint ist:



$q = \Sigma q_i$



$q = \Sigma q'_j, q_i = \Sigma^{(l)} q'_j$

Für die Zerlegungen in die q'_j kann man (δ_1) durch Induktion leicht beweisen. Aus $P_{q_i} = \sum^{(i)} P_{q'_j}$, $P_q = \sum P_{q'_j}$ folgt dann $P_q = \sum_j P_{q'_j} = \sum_i \sum_j^{(i)} P_{q'_j} = \sum P_{q_i}$, d.h. (δ_1) .

Wir definieren nun einen Ring-Homomorphismus i von L in den von $\mathcal{P}$ erzeugten kommutativen Operatorenring $\mathbf{P}$:

$$i: \psi = \sum \alpha_i \chi_{q_i} \rightarrow i(\psi) = \sum \alpha_i P_{q_i} \quad \text{für} \quad \psi \in L.$$

Wir müssen zeigen, daß aus $\sum \alpha_i \chi_{q_i} = 0$ auch $\sum \alpha_i P_{q_i} = 0$ folgt. Gemäß (γ) gibt es Quader q'_j mit $q_i = \sum \varepsilon_{ij} q'_j$, also

$$\chi_{q_i} \equiv \sum \varepsilon_{ij} \chi_{q'_j} \pmod{L_0} \quad \text{und} \quad P_{q_i} = \sum \varepsilon_{ij} P_{q'_j},$$

folglich

$$\psi \equiv \sum_j \left(\sum_i \alpha_i \varepsilon_{ij} \right) \chi_{q'_j} \pmod{L_0} \quad \text{und} \quad i(\psi) = \sum_j \left(\sum_i \alpha_i \varepsilon_{ij} \right) P_{q'_j}.$$

Dabei können wir noch die entarteten q'_j fortlassen. Dann folgt aus $\psi = 0$ aber $\sum \alpha_i \varepsilon_{ij} = 0$ für alle j und folglich $i(\psi) = 0$. Daß i multiplikativ ist, folgt aus (δ_2) . Nun definieren wir auf L ein Integral I durch

$$I(\psi) = l(i(\psi)), \quad \psi \in L.$$

I ist homogen und additiv und verschwindet auf L_0 . Wir müssen zeigen, daß I auch positiv und stetig ist, d.h. daß aus $\psi_n \searrow 0$ auch $I(\psi_n) \searrow 0$ folgt. Für jedes $\psi \in L$ gibt es eine Kongruenz $\psi \equiv \sum \alpha_i \chi_{q_i} \pmod{L_0}$ mit paarweise fremden nicht leeren q_i . Ist ψ positiv, so sind auch alle α_i positiv. Dann gilt $I(\psi) = \sum \alpha_i I(\chi_{q_i}) = \sum \alpha_i |P_{q_i}|^2 \geq 0$. Folglich ist I positiv.

Nun sei $\psi_n \searrow 0$ und $\psi_n(s) \leq C$ für alle n und $s \in S$. Es gibt eine Folge von Hyperebenen $H_i \subset S$, definiert durch $\xi_{x_i} = \eta_i$, derart, daß ψ_n höchstens auf H_1 bis $H_{k(n)}$ unstetig ist. Dabei können wir noch annehmen, daß $k(n)$ monoton wächst. Sei $\varepsilon > 0$. Wir bestimmen Zahlen $\delta_i > 0$, derart, daß für die durch $|\xi_{x_i} - \eta_i| \leq \delta_i$ definierten Quader u_i gilt: $I(\chi_{u_i}) = l(P_{u_i}) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$. Für $v_n = \bigcup_{i=1}^{k(n)} u_i$ gilt:

gilt dann $I(\chi_{v_n}) \leq \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon$. Das Komplement $w_n = S - v_n$ ist abgeschlossen und ψ_n auf w_n stetig, die Funktion $\varphi_n = \psi_n \chi_{w_n}$ auf S also oberhalb stetig. Da S kompakt ist und auch $\varphi_n \searrow 0$ gilt, gibt es also ein $n_0(\varepsilon)$ mit $\varphi_n(s) \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0(\varepsilon)$. Daraus folgt $\psi_n \leq \varepsilon \chi_{w_n} + C \chi_{v_n}$, also

$$I(\psi_n) \leq \varepsilon I(\chi_{w_n}) + C I(\chi_{v_n}) \leq \varepsilon(1 + C),$$

d.h. $I(\psi_n) \searrow 0$.

Das Funktional I läßt sich nach dem Daniellschen Verfahren zu einem Integral auf S fortsetzen. Zu I und S gehört der (reelle) Hilbert-Raum $\mathfrak{Q} = {}^r\mathfrak{Q}^2(S)$ mit dem S -Stamm $\mathcal{P}_S$. Wir wollen nun den in (3.1) genannten Isomorphismus zwischen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{H}_1$ konstruieren.

Der von den charakteristischen Funktionen der Quader erzeugte Modul L liegt in $\mathfrak{Q}$ dicht. Mit Hilfe des oben definierten Homomorphismus i von L in $\mathbf{P}$ definieren wir die Abbildung

$$\iota: \psi \rightarrow \iota(\psi) = P_\psi e, \quad P_\psi = i(\psi) \in \mathbf{P},$$

von L in $\mathfrak{H}_1$. Jedes $P \in \mathcal{P}$ liegt in einem $\alpha \in \Omega$. Ist $P = P_\alpha^\alpha$ und q der durch $0 \leq \xi_\alpha \leq \alpha$ definierte Quader, so ist $P = P_q = P_{\chi_q}$ und $P e = \iota(\chi_q)$ liegt in $\iota(L)$, d.h. $\iota(L)$ ist dicht in $\mathfrak{H}_1$. Ferner gilt

$$(\iota(\varphi), \iota(\psi)) = (P_\varphi e, P_\psi e) = (P_\varphi P_\psi e, e) = (P_{\varphi \psi} e, e) = I(\varphi \psi) = (\varphi, \psi).$$

Folglich ist ι ein Isomorphismus zwischen den dichten Unterräumen $L \subset \mathfrak{Q}$ und $\iota(L) \subset \mathfrak{H}_1$ und läßt sich zu einem Isomorphismus zwischen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{H}_1$ fortsetzen. Für $P_{\chi_q} \in \mathcal{P}$ ist $P_{\chi_q} \iota(\psi) = P_{\chi_q \psi} e = \iota(\chi_q \psi) = \iota(P_q \psi)$, d.h. $\iota(P_q) = P_{\chi_q}$. Daraus folgt $\iota^{-1}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}_S$. Schließlich ist $\iota^{-1}(\mathcal{P})$ ein Teilstamm von $\mathcal{P}_S$, der alle $P_q \in \mathcal{P}_S$ für Quader q enthält. Folglich liegen alle P_M mit M aus dem von den q erzeugten σ -Körper in $\iota^{-1}(\mathcal{P})$, d.h. es ist $\iota(\mathcal{P}_S) = \mathcal{P}$. Damit ist (3.1) bewiesen.

§ 4

Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, daß ein diskreter Maßraum D existiert und eine Treppe X im Produktraum $S \times D$, so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}^2(X)$ und $\mathcal{P} = \mathcal{P}_S$ ist. Ist insbesondere $X = S \times D$, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}^2(X)$ nichts anderes als die gewöhnliche direkte Summe $\sum_{d \in D} \mathfrak{Q}^2(S_d)$, wobei alle S_d zu S isomorph sind.

Umgekehrt: Ist $\mathfrak{H} = \sum \mathfrak{Q}^2(S_\mu)$ mit lauter zu S isomorphen S_μ , so können wir S_μ mit $S \times \{\mu\}$ identifizieren und haben $\mathfrak{H} = \sum \mathfrak{Q}^2(S \times \{\mu\}) = \mathfrak{Q}^2(S \times D)$, wenn D der diskrete Maßraum der Indizes μ ist. Dieser besonders einfache Fall macht das folgende Induktionsverfahren plausibel, das im wesentlichen darin besteht, zunächst im orthogonalen Komplement $\mathfrak{H}_1^\perp$ von $\mathfrak{H}_1$ einen Unterraum $\mathfrak{H}_2$ zu finden, der in kanonischer Weise zu einem $\mathfrak{Q}^2(S_2)$ mit „möglichst großem“ $S_2 \subset S$ isomorph ist; dann in $(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)^\perp$ einen Unterraum $\mathfrak{H}_3 \cong \mathfrak{Q}^2(S_3)$ mit möglichst großem $S_3 \subset S_2$ abzuspalten usw. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen existiert ein endlicher Maßraum S und ein abgeschlossener Teilraum $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}$, den wir mit $\mathfrak{Q}^2(S)$ identifizieren können. Ist ferner P_1 die

Projektion von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}_1$, so ist $P_1\mathcal{P}=\mathcal{P}_S$ und $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_S$ sind isomorph. Wir wollen im folgenden auch $\mathcal{P}$ mit $\mathcal{P}_S$ bezeichnen.

Wir betrachten Systeme $H_\varrho=\{p_\mu\}_{\mu<\varrho}$, die für jede Ordnungszahl $\mu<\varrho$ ein Paar $p_\mu=\{\mathfrak{H}_\mu, S_\mu\}$ aus einem Unterraum $\mathfrak{H}_\mu\subset\mathfrak{H}$ und einem summierbaren Teil $S_\mu\in\mathcal{M}_S$ enthalten und die folgende Eigenschaften haben:

$\alpha)$ Die $\mathfrak{H}_\mu$ sind $\mathcal{P}$ -invariant und lassen sich so mit $\mathfrak{Q}^2(S_\mu)$ identifizieren, daß $\mathcal{P}$ in $\mathfrak{H}_\mu=\mathfrak{Q}^2(S_\mu)$ den zugehörigen Stamm $\mathcal{P}_{S_\mu}$ induziert.

$\beta)$ Es ist $\mathfrak{H}=\sum_{\mu<\varrho}\mathfrak{H}_\mu\oplus\mathfrak{H}_\varrho$.

$\gamma)$ $\sigma_\varrho=\{S_\mu\}_{\mu<\varrho}$ ist eine absteigende Kette in $(\mathcal{M}_S, \triangleleft)$.

$\inf \sigma_\varrho=T_\varrho$ liegt dann in $\mathcal{M}_S$ und es ist $P_{T_\varrho}=\inf\{P_{S_\mu}\}\in\mathcal{P}=\mathcal{P}_S$.

$\delta)$ $(E-P_{T_\varrho})\mathfrak{H}_\varrho=0$.

Ist für ein H_ϱ nun $\mathfrak{H}_\varrho\neq 0$, so zeigen wir, daß ein Paar $p_\varrho=\{\mathfrak{H}_\varrho, S_\varrho\}$ existiert, für das die Vereinigung $H_\varrho\cup\{p_\varrho\}$ auch noch die Eigenschaften $\alpha)$ bis $\delta)$ hat.

$\mathcal{P}$ enthält ein eindeutig bestimmtes minimales $P\leq P_{T_\varrho}$ mit $(E-P)\mathfrak{H}_\varrho=0$. Ist $P=P_{T_\varrho}$, so setzen wir $S_\varrho=T_\varrho$. Ist $P=P_M<P_{T_\varrho}$, so setzen wir $S_\varrho=M\cap T_\varrho$. Dann ist auch $P=P_{S_\varrho}$ und $S_\varrho\triangleleft S_\mu$ für alle $\mu<\varrho$, d. h. $\sigma=\sigma_\varrho\cup\{S_\varrho\}$ ist eine Kette aus $\mathcal{M}_S$.

Zu jedem $x\in\mathfrak{H}_\varrho$, $x\neq 0$, gibt es ein minimales $P(x)\in P_{S_\varrho}\mathcal{P}$, das x festläßt. Sei $\{P(x_i)\}=\xi$ ein System paarweise orthogonaler derartiger Projektionen; die x_i sind dann ebenfalls orthogonal. Ist $P'=\sum_i P(x_i)<P_{S_\varrho}$, so gibt es ein $x\in\mathfrak{H}_\varrho$ mit $(P_{S_\varrho}-P')x=x\neq 0$. Da dann $P(x)\neq 0$ und zu allen $P(x_i)$ orthogonal ist, ist ξ nicht maximal. Für ein maximales System ξ ist folglich $P_{S_\varrho}=\sum_i P(x_i)$. Wegen $\sum_i (P(x_i)e, e)\leq 1$ kann ξ höchstens abzählbar sein, wir können die x_i also so normieren, daß $h=\sum x_i$ in $\mathfrak{H}_\varrho$ existiert. Offenbar ist $P(h)=P_{S_\varrho}$.

Ist $\mathcal{M}_\varrho$ das System aller meßbaren Teile von S_ϱ und $M\in\mathcal{M}_\varrho$, so ist durch $m(M)=(P_M h, h)$, $P_M\in\mathcal{P}_{S_\varrho}$, ein bezüglich I absolut stetiges positives Maß auf $\mathcal{M}_\varrho$ definiert. Nach (1.2) gibt es also eine I -summierbare positive Funktion f auf S_ϱ mit $m(M)=I(f\chi_M)$ für alle $M\in\mathcal{M}_\varrho$. Die positive Wurzel g aus f liegt dann in $\mathfrak{Q}^2(S_\varrho)$ und für $\psi\in L$ gilt:

$$|P_\psi h|^2=(P_\psi^2 h, h)=(P_{\psi^*} h, h)=I(g^2\psi^2)=I(|g\psi|^2),$$

d. h. $g\psi\in\mathfrak{Q}^2(S_\varrho)$ und $|P_\psi h|=|g\psi|_2$. Ein dichter Unterraum des von den $P_\psi h$ erzeugten reellen Hilbert-Raumes wird also durch $P_\psi h\rightarrow g\psi$ isomorph in $\mathfrak{Q}^2(S_\varrho)$ abgebildet. Dieser Isomorphismus läßt sich zu einem Isomorphismus ϑ eines (komplexen) Unterraumes $\mathfrak{H}_\varrho\subset\mathfrak{H}_\varrho$ in $\mathfrak{Q}^2(S_\varrho)$ fortsetzen. Nach Wahl von h kann g höchstens auf einer Nullmenge verschwinden. Ist $f\in\mathfrak{Q}^2(S_\varrho)$ auf $\vartheta(\mathfrak{H}_\varrho)$ senkrecht, so folgt $I(gf\chi_X)=0$ für alle $X\in\mathcal{M}_\varrho$, also $gf=0$ fast überall und folglich $f=0$, d. h. es ist $\vartheta(\mathfrak{H}_\varrho)=\mathfrak{Q}^2(S_\varrho)$. Schließlich ist klar, daß $\mathcal{P}$ bei Identifikation von $\mathfrak{H}_\varrho$ und $\mathfrak{Q}^2(S_\varrho)$ gerade $\mathcal{P}_{S_\varrho}$ induziert. Im ganzen haben wir gezeigt, daß das System $H_{\varrho+1}=H_\varrho\cup\{\mathfrak{H}_\varrho, S_\varrho\}$ die Eigenschaften $\alpha)$ bis $\delta)$ hat und H_ϱ echt enthält. Da die H_ϱ offensichtlich induktiv geordnet sind, existiert ein

maximales H_ζ und für dieses muß $\mathfrak{R}_\zeta = 0$ sein, also:

$$\mathfrak{H} = \sum_{\mu < \zeta} \mathfrak{H}_\mu = \sum_{\mu < \zeta} \mathfrak{Q}^2(S_\mu).$$

Wir wählen als Maßraum D die Menge der Ordnungszahlen $\mu < \zeta$, jede mit dem Maß 1. Für jedes μ liegt dann $S'_\mu = S_\mu \times \{\mu\}$ im Produkt $S \times D$ und $X = \bigcup_\mu S'_\mu$ ist ein meßbarer Teil von $S \times D$. $\{S'_\mu\}$ ist eine meßbare Zerlegung von X und S'_μ für jedes μ mit S_μ kanonisch isomorph. Folglich ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}^2(X)$ und $\mathcal{P} = \mathcal{P}_S$.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß X eine Treppe ist. Die Ketten $\sigma = \sigma_\zeta$ und $m(\sigma) = \{m(S_\mu)\}$, $S_\mu \in \sigma$, sind isomorph und da $m(\sigma)$ wohlgeordnet ist also abzählbar. Folglich ist auch das System Φ der meßbaren Mengen $T_\mu = (\bigcap_{\nu < \mu} S_\nu) - S_\mu$ abzählbar. Da die T_μ paarweise fremd sind und $S = \bigcup_\mu T_\mu$ ist, ist Φ eine meßbare Zerlegung von S und mit $X_\mu = X \cap (T_\mu \times D)$ gilt $\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}^2(X) = \sum_\mu \mathfrak{Q}^2(X_\mu)$, wobei höchstens abzählbar viele Summanden nicht verschwinden. Nun ist $X = \bigcup_\lambda S_\lambda \times \{\lambda\}$, also

$$X_\mu = \bigcup_\lambda \{(S_\lambda \times \{\lambda\}) \cap (T_\mu \times D)\} = \bigcup_\lambda (S_\lambda \cap T_\mu) \times \{\lambda\}.$$

Weiter:

$$S_\lambda \cap T_\mu = S_\lambda \cap \left\{ \bigcap_{\nu < \mu} S_\nu - S_\mu \right\} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } \lambda \geq \mu \\ T_\mu & \text{für } \lambda < \mu. \end{cases}$$

Setzen wir $D_\mu = \{\nu\}_{\nu < \mu}$, so ist demnach $X_\mu = T_\mu \times D_\mu$ und folglich ist X in der Tat eine Treppe.

§ 5

Wir wollen jetzt untersuchen, wie weit die Maßräume S_α durch $\mathfrak{H}$ und $\mathcal{P}$ bestimmt sind. Natürlich können die S_α höchstens bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sein. Dabei heißen Maßräume S und S' *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus ϑ von $\mathfrak{Q}^2(S)$ auf $\mathfrak{Q}^2(S')$ mit $\vartheta(\mathcal{P}_S) = \mathcal{P}_{S'}$ gibt. Wir haben hier der Einfachheit halber den durch ϑ auf den Operatoren induzierten Isomorphismus wieder mit ϑ bezeichnet; das werden wir auch im folgenden tun.

Für den zu S gehörigen Stamm von $\mathfrak{Q}^2(S)$ gelte $\mathcal{P}_S = \sum \mathcal{P}_\mu$. Ist $P_\mu = P_{S_\mu}$ die maximale Projektion aus $\mathcal{P}_\mu$, so können wir die punktefremde Vereinigung S^* der S_μ bilden. In S^* sind also Punkte aus verschiedenen S_μ verschieden, obgleich sie als Punkte von S identisch sein können. Da $P_\mu \mathfrak{Q}^2(S)$ und $\mathfrak{Q}^2(S_\mu)$ kanonisch isomorph sind und $\mathfrak{Q}^2(S)$ die Summe der $P_\mu \mathfrak{Q}^2(S)$ ist, sind S und S^* äquivalent.

(5.1) *Sind die Stämme $\mathcal{P}_S$ und $\mathcal{P}_{S'}$ der Hilbert-Räume $\mathfrak{Q}^2(S)$ und $\mathfrak{Q}^2(S')$ isomorph, so sind S und S' äquivalent.*

„Isomorph“ bezieht sich hier natürlich auf die Vollständiger Verbandstruktur der Stämme. Wegen der Isomorphie können wir $\mathcal{P}_S$ und $\mathcal{P}_{S'}$ in Summen von Stämmen $\mathcal{P}_{S_\mu}$ und $\mathcal{P}_{S'_\mu}$ zerlegen, wobei der Isomorphismus ϑ $\mathcal{P}_{S_\mu}$ auf $\mathcal{P}_{S'_\mu}$ abbildet und die S_μ , bzw. S'_μ meßbare Teilräume endlichen Maßes aus S , bzw. S' sind. Wegen der vor (5.1) gemachten Bemerkung können wir

ferner annehmen, daß $\{S_\mu\}$ und $\{S'_\mu\}$ meßbare Zerlegungen von S und S' sind. Wir brauchen jetzt (5.1) nur für die S_μ und S'_μ zu zeigen, d. h. wir können von vornherein annehmen, daß S und S' endliche Maßräume sind. Ist $e = \chi_S \in \mathfrak{Q}^2(S)$, so ist durch $m(X') = (\vartheta^{-1}(P_{X'}) e, e)$ auf $\mathcal{M}_{S'}$ ein positives Maß definiert, sind also I , bzw. I' die Integrale von S , bzw. S' , so gibt es nach (1.2) ein I' -summierbares positives $f = g^2$ mit $m(X') = I'(f \chi_{X'})$. Da m nur auf Nullmengen verschwindet, ist wieder $g > 0$ fast überall. Der Isomorphismus ϑ hat eine eindeutige Fortsetzung auf die Ringe $L \subset \mathfrak{Q}^2(S)$, bzw. $L' \subset \mathfrak{Q}^2(S')$ der Linearkombinationen der χ_X , bzw. $\chi_{X'}$. Für $\psi \in L$ setzen wir $\lambda(\psi) = g \vartheta(\psi)$. Aus

$$I'(g \vartheta(\psi) g \vartheta(\varphi)) = I'(f \vartheta(\psi \varphi)) = I(\psi \varphi)$$

folgt, daß λ ein Isomorphismus von L in $\mathfrak{Q}^2(S')$ ist, der sich also zu einem Isomorphismus von $\mathfrak{Q}^2(S)$ in $\mathfrak{Q}^2(S')$ fortsetzen läßt. $g = \lambda(\chi_S)$ liegt im Bilde von λ , daraus folgt genau wie an entsprechender Stelle in § 4, daß λ ein Isomorphismus von $\mathfrak{Q}^2(S)$ auf $\mathfrak{Q}^2(S')$ ist. Auf den Stämmen stimmen λ und ϑ ersichtlich überein. Damit ist (5.1) bewiesen.

Der Beweis für die Eindeutigkeit der S_a beruht im wesentlichen auf folgendem Lemma:

(5.2) Sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathcal{P}$ ein Stamm von $\mathfrak{H}$. Sind ϑ_1 und ϑ_2 Isomorphismen von $\mathfrak{H}$ auf die Räume $a_1 \mathfrak{Q}^2(S_1)$ und $a_2 \mathfrak{Q}^2(S_2)$, derart, daß $\vartheta_i(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_{S_i}$, der S_i -Stamm von $a_i \mathfrak{Q}^2(S_i)$ ist, $i = 1, 2$, so ist $a_1 = a_2$ und S_1 und S_2 sind äquivalent.

Beweis: Der S_i -Stamm von $\mathfrak{Q}^2(S_i)$ ist zu $\mathcal{P}_{S_i}$ isomorph, da die $\mathcal{P}_{S_i}$ isomorph sind, sind also auch die S_i -Stämme der $\mathfrak{Q}^2(S_i)$ isomorph, d. h. die S_i sind nach (5.1) äquivalent. Da man in einem Hilbert-Raum $a \mathfrak{Q}^2(S)$ den Raum S offenbar durch einen äquivalenten ersetzen kann, dürfen wir für den Rest des Beweises also $S_1 = S_2 = S$ voraussetzen. Die Behauptung besagt dann: Haben wir zwei Zerlegungen $\mathfrak{H} = \sum_{a_1} \mathfrak{H}_i^1 = \sum_{a_2} \mathfrak{H}_i^2$ von $\mathfrak{H}$ in $\mathcal{P}$ -invariante zu $\mathfrak{Q}^2(S)$ isomorphe Summanden, so sind die Anzahlen a_i der Summanden in beiden Summen gleich. Die Betrachtung meßbarer Zerlegungen von S zeigt zunächst wieder, daß wir uns auf den Fall eines endlichen S beschränken können. Dann gibt es in jedem $\mathfrak{H}_i^1$ auf Grund des Isomorphismus mit $\mathfrak{Q}^2(S)$ ein der Funktion $\chi_S \in \mathfrak{Q}^2(S)$ entsprechendes Element e_i . Für jedes i ist $e_i = \sum_j a_{ij}$ mit $a_{ij} \in \mathfrak{H}_j^2$. Da für jedes i höchstens abzählbar viele $a_{ij} \neq 0$ sind, liegen die e_i in einer Teilsumme von höchstens $\aleph_0 a_1$ Summanden $\mathfrak{H}_i^2$; da die $P e_i$, $P \in \mathcal{P}$, $\mathfrak{H}$ erzeugen und die $\mathfrak{H}_j^2$ alle $\mathcal{P}$ -invariant sind, folgt $a_2 \leq \aleph_0 a_1$. Genau so $a_1 \leq \aleph_0 a_2$. Folglich ist $\aleph_0 a_1 = \aleph_0 a_2$, sind also a_1 und a_2 beide unendlich, so ist $a_1 = a_2$. Ist etwa a_2 endlich und $\leq a_1$, so folgt $a_2 \leq a_1 \leq \aleph_0$. Wir zeigen, daß $a_2 < a_1$ nicht möglich ist. Wir können die Elemente $a_{ij} \in \mathfrak{H}_j^2$ mit Funktionen $f_{ij}(s) \in \mathfrak{Q}^2(S)$ identifizieren. $F = (f_{ij})$ ist dann eine Matrix von a_1 Zeilen und a_2 Spalten. Für jedes $M \in \mathcal{M}_S$ ist

$$(P_M e_i, e_k) = \sum_j (P_M a_{ij}, a_{kj}) = I\left(\sum_j \chi_M f_{ij} \bar{f}_{kj}\right) = I\left(\chi_M \left(\sum_j f_{ij} \bar{f}_{kj}\right)\right) = \delta_{ik} I(\chi_M).$$

Daraus folgt für jedes Paar i, k fast überall:

$$(\varepsilon) \quad \sum_j f_{ij}(s) \overline{f_{kj}(s)} = \delta_{ik}.$$

Da höchstens abzählbar viele Gleichungen (ε) auftreten, können wir nach eventueller Unterdrückung einer Nullmenge annehmen, daß (ε) überall gilt; d.h. aber, daß $FF^* = E$ die a_1 -reihige Einheitsmatrix ist. ($F^* = (\overline{f_{ji}})$ die transponierte Matrix.) Das ist nur für $a_1 = a_2$ möglich. Damit ist (5.2) bewiesen.

Wir wollen nun die Eindeutigkeit der zu einem Stamm $\mathcal{P}$ eines Hilbert-Raumes $\mathfrak{H}$ gehörigen direkten Zerlegungen beweisen. Angenommen es ist gleichzeitig

$$\mathfrak{H} = \sum_{\alpha} \alpha \mathfrak{L}^2(S_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \alpha \mathfrak{L}^2(T_{\alpha}).$$

Wir haben dann entsprechende Zerlegungen der Stämme

$$\mathcal{P} = \sum \mathcal{P}_{\alpha} = \sum \mathcal{P}'_{\alpha}.$$

Sind E_{α} und $E'_{\alpha'}$ die maximalen Projektionen aus $\mathcal{P}_{\alpha}$ und $\mathcal{P}'_{\alpha'}$, so liegt $P = E_{\alpha} E'_{\alpha'}$ in $\mathcal{P}_{\alpha} \cap \mathcal{P}'_{\alpha'}$ und es gibt ein $M \subset S_{\alpha}$, sowie ein $M' \subset T_{\alpha'}$, derart, daß $P = P_M \in \mathcal{P}_{S_{\alpha}}$ und $P = P_{M'} \in \mathcal{P}_{T_{\alpha'}}$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} P \mathfrak{H} &= P_M \alpha \mathfrak{L}^2(S_{\alpha}) = \alpha \mathfrak{L}^2(M) \\ &= P_{M'} \alpha' \mathfrak{L}^2(T_{\alpha'}) = \alpha' \mathfrak{L}^2(M'). \end{aligned}$$

Nach (5.2) folgt hieraus $\alpha = \alpha'$ oder $P = 0$. Folglich ist $E_{\alpha} = \sum_{\alpha'} E_{\alpha} E'_{\alpha'} = E_{\alpha} E'_{\alpha}$ und ebenso $E'_{\alpha} = E_{\alpha} E'_{\alpha}$, also $E_{\alpha} = E'_{\alpha}$. Daraus folgt

$$E_{\alpha} \mathfrak{H} = E'_{\alpha} \mathfrak{H} = \alpha \mathfrak{L}^2(S_{\alpha}) = \alpha \mathfrak{L}^2(T_{\alpha}).$$

Wegen (5.2) sind S_{α} und T_{α} dann äquivalent. Damit ist die Eindeutigkeit bis auf Äquivalenz einer Zerlegung gezeigt. Wir formulieren jetzt unser endgültiges Ergebnis:

Reduktionssatz: Sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbert-Raum der Dimension $\mathfrak{h}$ und $\mathcal{P}$ ein Stamm, der den Einheitsoperator enthält. Zu jedem $\alpha \leq \mathfrak{h}$ existiert (bis auf Äquivalenz) genau ein Maßraum S_{α} (der auch leer sein kann), derart daß

$$\mathfrak{H} = \sum_{\alpha \leq \mathfrak{h}} \alpha \mathfrak{L}^2(S_{\alpha})$$

und entsprechend

$$\mathcal{P} = \sum_{\alpha \leq \mathfrak{h}} \mathcal{P}_{\alpha}$$

ist, wobei die $\mathcal{P}_{\alpha}$ die zu den $\alpha \mathfrak{L}^2(S_{\alpha})$ gehörigen Stämme $\mathcal{P}_{S_{\alpha}}$ im Sinne von § 2 sind.

Die Funktion $\alpha \rightarrow \{S_{\alpha}\}$, die jedem $\alpha \leq \mathfrak{h}$ die Äquivalenzklasse der S_{α} zuordnet, ist also eine Unitär-Invariante von $\mathcal{P}$.

§ 6

Wir wollen in diesem letzten Paragraphen zeigen, daß zu jedem Maßraum (S, I) ein äquivalenter perfekter Maßraum (E, ρ) existiert. Unter einem perfekten Maßraum verstehen wir (vgl. [10]) einen lokal kompakten Raum E mit positivem Radonschem Maß ρ und der Eigenschaft, daß jede beschränkte

meßbare Funktion zu einer stetigen äquivalent ist und ferner jede nicht leere offene summierbare Menge positives Maß hat.

Wir beginnen mit dem Fall eines *endlichen* Maßraumes (S, I) und setzen $I(\chi_S) = 1$ voraus. Dann ist $\mathfrak{L}^\infty(S) = \mathfrak{B}$ eine halbeinfache involutorische $(f^*(s) = \overline{f(s)})$ kommutative Banach-Algebra mit Einselement. Die maximalen Ideale von $\mathfrak{B}$ bilden also einen kompakten Raum E und die Fourier-Transformation T ist wegen $|f^*|_\infty = |f|_\infty$ ein $*$ -Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf die Algebra $\mathfrak{C} = C(E)$ aller stetigen Funktionen auf E . Es ist $Tf^* = \overline{Tf}$ und $|Tf| = |f|_\infty$ (mit $|q| = \max_{x \in E} |q(x)|$ für $q \in \mathfrak{C}$). Die reellen Teile ${}^r\mathfrak{B}$, bzw. ${}^r\mathfrak{C}$ sind durch die Gleichung $f = f^*$, bzw. $f = \overline{f}$ gekennzeichnet, die Teile $\mathfrak{B}_+$, bzw. $\mathfrak{C}_+$ der positiven f durch $f = gg^*$, bzw. $f = g\overline{g}$. Da T $*$ -zulässig ist, folgt

$$(6.1) \quad T {}^r\mathfrak{B} = {}^r\mathfrak{C}, \quad T \mathfrak{B}_+ = \mathfrak{C}_+.$$

Wir definieren nun auf $\mathfrak{C}$ ein Radonsches Maß p durch

$$p(Tf) = I(f).$$

p ist homogen, linear und wegen (6.1) auch positiv.

Wir wollen nun zeigen, daß (E, p) perfekt und mit (S, I) äquivalent ist.

(6.2) *Die meßbaren gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen bilden eine Basis der offenen Mengen in E . Die einzige offene Nullmenge ist die leere.*

$\mathfrak{B}$ wird erzeugt von den charakteristischen Funktionen χ_M der $M \in \mathcal{M}_S$, $\mathfrak{C}$ also von den $h_M = T\chi_M$. Da T ein Isomorphismus ist, folgt $h_M = \overline{h}_M = h_M^2$, d.h. die h_M sind charakteristische Funktionen gewisser Teile $TM \subset E$. Da die h_M stetig sind, sind die TM offen, abgeschlossen und meßbar, ferner punktetrennend, da die h_M $\mathfrak{C}$ erzeugen. Die TM definieren also eine separierte Topologie, die die gegebene kompakte höchstens vergrößert, also mit ihr identisch ist. Ist nun die meßbare Menge $U \subset E$ offen und nicht leer, so enthält sie ein TM . Wegen $p(TM) = I(\chi_M) > 0$ ist dann auch $p(U) > 0$. Damit ist (6.2) bewiesen. Nun kommt der Kernpunkt:

(6.3) *Jedes $f \in L^\infty(E, p)$ ist zu einem $g \in \mathfrak{C}$ äquivalent.*

Sei F die Menge aller $f \in L^\infty(E)$, die zu stetigen Funktionen äquivalent sind. Um $F = L^\infty(E)$ zu beweisen, genügt zu zeigen, daß mit jeder Folge $\{f'_n\} \subset F$, für die $f'_n \searrow f' \geq 0$ gilt, auch f' in F liegt. Sei f_n stetig und zu f'_n äquivalent. Da $f'_n - f'_{n+1}$ positiv ist, folgt $f_n - f_{n+1} \geq 0$ fast überall, wegen der Stetigkeit also überall, folglich gilt auch $f_n \searrow f \geq 0$ und f und f' sind äquivalent. Nun ist $f_n = Tg_n$ und wegen (6.1) liegt $g_n - g_{n+1}$ in $\mathfrak{B}_+$. Folglich gibt es ein $g \in \mathfrak{B}_+$ mit $g_n \searrow g$, also $g_n - g \searrow 0$, also $(f_n - Tg) \searrow (f - Tg) \in L_+^\infty(E)$. Ferner: $0 \leq p(f - Tg) = \lim p(Tg_n - Tg) = \lim I(g_n - g) = 0$, d.h. $p(f - Tg) = 0$, f zu Tg äquivalent. Da Tg stetig ist, haben wir damit (6.3) bewiesen. Folgerung:

(6.4) *Jede meßbare Menge aus E ist zu einer offen-abgeschlossenen äquivalent.*

Sei $M \in \mathcal{M}_E$ und $f \in \mathfrak{C}$ zu χ_M äquivalent. Die Menge U aller $x \in E$ mit $f(x) \neq 0, 1$ ist offen und $h = \chi_U(f - \chi_M)$ ist eine Nullfunktion, die auf $E - U$ verschwindet und auf U von Null verschieden ist. Daraus folgt, daß U eine

Nullmenge, also leer ist. Folglich ist $f = \chi_{M'}$ mit offen-abgeschlossenem zu M äquivalentem $M' \subset E$.

(6.5) Jedes offene $U \subset E$ ist meßbar und die abgeschlossene Hülle $\bar{U}$ zu U äquivalent und offen.

Sei M ein maximaler offener meßbarer Teil von U und V die zu M äquivalente offen-abgeschlossene Menge. $M - V$ ist eine offene Nullmenge, also leer, d.h. $M \subset V$. Falls die offene Menge $U - V$ nicht leer ist, gibt es ein offen-abgeschlossenes nicht leeres meßbares $W \subset U - V$, was wegen $M \triangleleft M \cup W \subset U$ der Maximalität von M widerspricht. Folglich ist $U \subset V$, d.h. $M \subset U \subset V$. Da M und V äquivalent sind, sind auch U und V äquivalent. Ferner gilt $\bar{U} \subset V$. Da $V - \bar{U}$ eine offene Nullmenge ist, muß $V = \bar{U}$ sein.

Die Transformation T ist ein Isomorphismus der Algebren L_S der (Klassen der) Linearkombinationen charakteristischer Funktionen χ_M , $M \in \mathcal{M}_S$, und L_E der Linearkombinationen der charakteristischen Funktionen offen-abgeschlossener Teile aus E . Für $f, g \in L_S$ gilt $I(fg) = p(TfTg)$. Da L_S in $\mathcal{Q}^2(S)$ und L_E in $\mathcal{Q}^2(E)$ dicht liegt, folgt die Isomorphie von $\mathcal{Q}^2(S)$ mit $\mathcal{Q}^2(E)$, und zwar derart, daß $\mathcal{P}_S$ und $\mathcal{P}_E$ einander entsprechen. Folglich sind S und E äquivalent.

Ist S nun beliebig und Φ eine meßbare Zerlegung in Teile endlichen Maßes, so können wir zu jedem $S_\mu \in \Phi$ einen äquivalenten und kompakten Maßraum E_μ finden. Die punktfremde Vereinigung E der E_μ ist dann ein lokal kompakter Raum, in dem alle E_μ offen-abgeschlossen sind. Jeder kompakte Teil aus E liegt in der Vereinigung endlich vieler E_μ . Ist f eine stetige Funktion auf E mit kompaktem Träger, so ist $f = \sum_\mu f_\mu$, wobei $f_\mu = \chi_{E_\mu} f$ ist. Da höchstens endlich viele $f_\mu \neq 0$ sind, können wir auf E durch $p(f) = \sum_\mu p_\mu(f_\mu)$, p_μ das zu E_μ gehörige Radonsche Maß, ein positives Funktional definieren, das offensichtlich ebenfalls ein Radonsches Maß ist. Ist $h \in L^\infty(E, p)$, so ist $h_\mu = \chi_{E_\mu} h \in L^\infty(E_\mu, p_\mu)$ und $|h_\mu|_\infty \leq |h|_\infty$. Es gibt folglich ein $g_\mu \in \mathcal{G}(E_\mu)$ mit $|g_\mu| \leq |h|_\infty$, das zu h_μ äquivalent ist. Ist g die durch $g(x) = g_\mu(x)$ für $x \in E_\mu$ auf E definierte Funktion, so ist g stetig, da die E_μ offen-abgeschlossen sind, zu h äquivalent und es ist $|g| \leq |h|_\infty$. Damit ist alles gezeigt.

Literatur

- [1] BADE, W. G.: On Boolean algebras of projections and algebras of operators. Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 345–360 (1955). — [2] BOURBAKI, N.: Integration, chap. I–V. Paris 1953 und 1957. — [3] DIXMIER, J.: Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien. Paris 1957. — [4] GODEMENT, R.: Sur la theorie des representations unitaires. Ann. of Math. **53**, 68–124 (1951). — [5] HALMOS, P.: Measure theory. New York 1950. — [6] HALMOS, P.: Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity. New York 1951. — [7] LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953. — [8] NEUMANN, J. v.: On rings of operators. Reduction theory. Ann. of Math. **50**, 401–485 (1949). — [9] NAIMARK, M. A., u. C. W. FOMIN: Neprerywnye prjamye summy hilbertowych prostranstw i nekotorye ich premenija. Uspechi Mat. Nauk **10**, 111–142 (1955). — [10] SEGAL, I. E.: Decompositions of operator algebras I, II. Mem. Amer. Math. Soc. **9**, New York 1951. — [11] THOMA, E.: Zur Reduktionstheorie in separablen Hilbert-Räumen. Math. Z. **67**, 1–9 (1957). — [12] THOMA, E.: Zur Reduktionstheorie in allgemeinen Hilbert-Räumen. Math. Z. **68**, 153–188 (1957).

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 29. April 1957)

Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen
endlicher projektiver Ebenen

Von
PETER DEMBOWSKI

Inhalt	Seite
Einleitung	59
1. Taktische Zerlegungen von λ -Ebenen	61
1.1. Grundbegriffe	61
1.2. Die Grundgleichungen	64
1.3. Anzahl der Klassen einer taktischen Zerlegung	65
1.4. Beziehungen zwischen verschiedenen taktischen Zerlegungen	66
2. Die abgeleitete Struktur $\mathfrak{G}/T$	69
2.1. Definitionen	69
2.2. Der Hauptsatz	70
2.3. Ergänzungssätze	72
2.4. Durch Teilebenen endlicher projektiver Ebenen definierte taktische Zerlegungen	75
2.5. Durch Ovale definierte taktische Zerlegungen	77
3. Die Matrizen einer taktischen Zerlegung	79
3.1. Die Matrix-Grundgleichungen	79
3.2. Zahlentheoretische Eigenschaften der $ \mathfrak{X} , \mathfrak{x} $	80
3.3. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von taktischen Zerlegungen	83
3.4. Vollsymmetrische Zerlegungen	86
Literaturverzeichnis	89

Einleitung

Eine Gruppe von Kollineationen einer endlichen projektiven Ebene zerlegt sowohl die Menge der Punkte als auch die der Geraden in Transitivitätsklassen. Man überzeugt sich leicht, daß für jede solche Punktklasse $\mathfrak{P}$ und jede solche Geradenklasse $\mathfrak{g}$ gilt:

- (*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Auf jeder Geraden von } \mathfrak{g} \text{ liegen gleichviele Punkte von } \mathfrak{P}. \\ \text{Durch jeden Punkt von } \mathfrak{P} \text{ gehen gleichviele Geraden von } \mathfrak{g}. \end{array} \right.$

Bei vielen Untersuchungen über Kollineationsgruppen endlicher projektiver Ebenen werden nun andere als diese Eigenschaften gar nicht benutzt; andererseits gibt es Klasseneinteilungen endlicher Ebenen mit den Eigenschaften (*), die nicht von einer Kollineationsgruppe herrühren. Es liegt daher nahe, allgemein Zerlegungen mit den Eigenschaften (*) zu untersuchen. Das wird in der vorliegenden Arbeit unternommen: Klasseneinteilungen der fraglichen Art nennen wir „taktische Zerlegungen“.

Es zeigt sich, daß die für die Untersuchung fundamentalen Gleichungen („Grundgleichungen“, S. 64) ohne Schwierigkeit für allgemeinere Strukturen

als endliche projektive Ebenen hergeleitet werden können, nämlich für die (endlichen) „ λ -Ebenen“, in denen je zwei Punkte λ Verbindungsgeraden und je zwei Geraden λ Schnittpunkte besitzen. Für diese Strukturen sind in der Literatur auch die Bezeichnungen „symmetrischer Blockplan“ (PICKERT [12], S. 228), „symmetric block design“ (HALL [7], S. 64) und „ (v, k, λ) -configuration“ (CHOWLA und RYSER [6], S. 93) üblich. Nur ausnahmsweise werden wir uns hier auf den Fall $\lambda = 1$ der endlichen projektiven Ebenen beschränken.

Das wesentliche Ergebnis des ersten Teiles der Arbeit ist der aus den Grundgleichungen leicht folgende Satz, daß die Anzahl der Punktklassen einer taktischen Zerlegung einer λ -Ebene gleich der ihrer Geradenklassen ist. Aus diesem Satz folgen viele Transitivitätseigenschaften von Kollineationsgruppen von λ -Ebenen; insbesondere ergeben sich Verallgemeinerungen von Resultaten von HALL und HOFFMAN (man vergleiche etwa [12], S. 304, 308) über zyklische Kollineationsgruppen endlicher projektiver Ebenen auf beliebige Gruppen und beliebige λ -Ebenen. Weiter läßt sich zeigen, daß eine Kollineationsgruppe einer λ -Ebene genau dann zweifach transitiv bezüglich der Punkte ist, wenn sie diese Eigenschaft auch bezüglich der Geraden hat.

Unter den Klassen einer taktischen Zerlegung Γ einer λ -Ebene $\mathfrak{E}$ läßt sich auf natürliche Weise eine Inzidenzrelation einführen, bezüglich welcher sie zu den Elementen einer neuen geometrischen Struktur werden, der „abgeleiteten Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ “. Diese Struktur wird im zweiten Teile der Arbeit untersucht; insbesondere behandeln wir die naheliegende Frage, wann $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine endliche projektive Ebene ist. Es zeigt sich überraschenderweise, daß das nur in dem trivialen Fall eintreten kann, daß $\lambda = 1$ (also $\mathfrak{E}$ selbst eine projektive Ebene) und Γ diejenige Zerlegung ist, deren sämtliche Klassen aus je einem Element bestehen. Auch wenn $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine ausgeartete projektive Ebene ist, folgt $\lambda = 1$, vorausgesetzt, daß die Anzahl gleichartiger Γ -Klassen mindestens gleich vier ist. Die taktischen Zerlegungen, die solche abgeleitete Strukturen erzeugen, sind dadurch charakterisiert, daß eine ihrer Klassen aus n^2 Elementen besteht (n ist die Ordnung von $\mathfrak{E}$). Ist die Anzahl gleichartiger Klassen kleiner als vier, so gelten die Resultate nicht mehr allgemein. Gegenbeispiele erhält man unter anderen durch Betrachtung von Teilebenen und Ovalen endlicher projektiver Ebenen.

Durch jede taktische Zerlegung einer λ -Ebene werden in natürlicher Weise gewisse ganzzahlige Matrizen definiert, die im Falle der trivialen Zerlegung in lauter Klassen mit je einem Element gleich den bekannten Inzidenzmatrizen der Ebene sind. Aus den Grundgleichungen folgen leicht entsprechende Beziehungen zwischen diesen Matrizen („Matrix-Grundgleichungen“, S. 80); die Untersuchung dieser Beziehungen bildet den Gegenstand des letzten Teiles der Arbeit. Es ergeben sich für die Existenz von taktischen Zerlegungen notwendige zahlentheoretische Bedingungen, die mit Hilfe verschiedener Methoden gewonnen werden. Aus einer elementaren Rangbetrachtung folgen zunächst Aussagen über die Anzahlen von Fixelementen von p -Gruppen von Kollineationen; z.B. kann die Anzahl der Fixpunkte einer projektiven Ebene bezüglich einer solchen Gruppe nur dann von der der Fixgeraden verschieden

sein, wenn p ein Teiler der Ordnung n der Ebene ist. Das wesentliche Hilfsmittel bei der weiteren Untersuchung ist die von HASSE und MINKOWSKI stammende Theorie der rationalen Kongruenz von quadratischen Formen. Der Hauptsatz dieser Theorie liefert mit den Matrixgleichungen eine fundamentale Beziehung zwischen Produkten von Hilbert-Symbolen [Gln. (H), S. 84], in die außer den Invarianten n und λ der gegebenen λ -Ebene noch die Anzahl der Γ -Klassen sowie die Anzahlen der Elemente der Γ -Klassen eingehen. Diese Beziehung enthält alle bisher bekannten Nichtexistenzsätze für endliche projektive Ebenen, insbesondere also den bekannten Satz von BRUCK und RYSER ([4], theorem 1, S. 88), aber auch die von CHOWLA und RYSER in [6] gegebenen Verallgemeinerungen auf λ -Ebenen. Sie liefert aber noch mehr; z.B. folgt die Nichtexistenz von nichttrivialen taktischen Zerlegungen mit lauter gleichmächtigen Klassen in vielen λ -Ebenen, z.B. in projektiven Ebenen der Ordnung 10.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit werden mit wenigen Ausnahmen durch ganz elementare Schlußweisen gewonnen, nämlich durch die für die Untersuchung endlicher Strukturen typischen abzählenden Methoden. Lediglich im letzten Abschnitt werden tieferliegende zahlentheoretische Hilfsmittel benutzt. Andererseits hat die hier entwickelte Theorie selbst interessante rein zahlentheoretische Konsequenzen: man kann mit ihrer Hilfe leicht mehrere Aussagen über die quadratischen Restcharaktere der Teiler von Zahlen des Typs $p^{2r} + p^r + 1$ gewinnen.

Es sei hier erwähnt, daß einige Resultate des letzten Abschnittes der Arbeit kürzlich auch von D. R. HUGHES in [10] angekündigt worden sind.

Herrn Professor BAER, von dem die Anregung zu der Beschäftigung mit dem vorliegenden Problemkreis ausgegangen ist, bin ich für viele wertvolle Ratschläge und Hinweise zu großem Dank verpflichtet.

1. Taktische Zerlegungen von λ -Ebenen

1.1. Grundbegriffe

Unter einer *verallgemeinerten Inzidenzstruktur* verstehen wir ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ von Mengen mit den Eigenschaften $\mathcal{P} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$. Die Elemente von $\mathcal{P}$ heißen *Punkte*, die von $\mathcal{G}$ *Geraden*. Punkte werden stets mit großen, Geraden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Ein Paar (P, g) von $\mathcal{P} \times \mathcal{G}$ heißt *inzident* oder *nichtinzident*, je nachdem ob es zu I gehört oder nicht. Statt $(P, g) \in I$ schreiben wir auch $P \upharpoonright g$ oder $g \upharpoonright P$, und diesen Sachverhalt drücken wir auch durch die Redeweisen „ P liegt auf g “, „ g geht durch P “ usw. aus.

Eine Gerade, die durch zwei verschiedene Punkte P und Q geht, heißt eine *Verbindungsgerade* von P und Q , ein Punkt, der auf zwei verschiedenen Geraden g und h liegt, ein *Schnittpunkt* von g und h . Im allgemeinen brauchen Schnittpunkte und Verbindungsgeraden vorgegebener Elementepaare weder zu existieren noch eindeutig zu sein. (Bei den von PICKERT in [12], S. 2 so bezeichneten „Inzidenzstrukturen“ schlechthin wird Eindeutigkeit von Schnitt und Verbindung gefordert.)

In dieser Arbeit werden nur *endliche* verallgemeinerte Inzidenzstrukturen betrachtet, d.h. solche, bei denen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ und damit auch I endliche Mengen sind. Die Attribute „endlich“ und „verallgemeinert“ werden wir künftig meist weglassen; das Wort „Inzidenzstruktur“ soll aber niemals in dem Pickert-schen, sondern stets in dem oben erklärten weiteren Sinne verstanden werden. Manchmal werden wir noch kürzer einfach „Struktur“ sagen.

Eine Inzidenzstruktur heißt (nach CARMICHAEL [5]) *taktische Konfiguration*, wenn $|I \cap (P \times \mathcal{G})|$ für jeden Punkt P gleich derselben Zahl r und dual dazu $|I \cap (\mathcal{P} \times g)|$ für jede Gerade g gleich derselben Zahl k ist, d.h. wenn durch jeden Punkt genau r Geraden gehen und auf jeder Geraden genau k Punkte liegen. Dabei dürfen r und k durchaus auch gleich Null sein. Eine einfache Abzählung von $|I|$ ergibt

$$(1) \quad k|\mathcal{G}| = r|\mathcal{P}|$$

für jede taktische Konfiguration.

Unter einer *taktischen Zerlegung* einer endlichen verallgemeinerten Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ verstehen wir eine Klasseneinteilung von $\mathcal{P} \cup \mathcal{G}$ in Punkt- und Geradenklassen (keine Klasse soll Punkte *und* Geraden enthalten) derart, daß für jedes Paar $\mathfrak{P}, \mathfrak{g}$ ungleichartiger Klassen die durch $I' = (\mathfrak{P} \times \mathfrak{g}) \cap I$ definierte Teilstruktur $(\mathfrak{P}, \mathfrak{g}, I')$ von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ eine taktische Konfiguration wird. Punktklassen taktischer Zerlegungen werden stets durch große, Geradenklassen durch kleine deutsche Buchstaben bezeichnet, und die bei (1) eingeführten Zahlen r und k werden für die durch eine taktische Zerlegung definierte taktische Konfiguration $(\mathfrak{P}, \mathfrak{g}, I')$ mit $(\mathfrak{g} \mathfrak{P})$ bzw. $(\mathfrak{P} \mathfrak{g})$ bezeichnet, d.h. auf jeder Geraden der Klasse $\mathfrak{g}$ liegen $(\mathfrak{P} \mathfrak{g})$ Punkte der Klasse $\mathfrak{P}$, und durch jeden Punkt der Klasse $\mathfrak{P}$ gehen $(\mathfrak{g} \mathfrak{P})$ Geraden der Klasse $\mathfrak{g}$.

Die Bedeutung des Begriffes der taktischen Zerlegung beruht auf dem nachfolgenden Satz 1. Wir definieren zunächst: Eine *Kollineation* einer Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ ist eine Permutation σ von $\mathcal{P} \cup \mathcal{G}$ mit $\mathcal{P}^\sigma = \mathcal{P}$, $\mathcal{G}^\sigma = \mathcal{G}$, $I^\sigma = I$. Dabei ist unter $(P, g)^\sigma$ natürlich das Paar (P^σ, g^σ) zu verstehen. Die sämtlichen Kollineationen von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ bilden eine Gruppe; jede Untergruppe dieser Gruppe heißt eine *Kollineationsgruppe* von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$.

Satz 1. *Die Transitivitätsklassen jeder Kollineationsgruppe einer beliebigen endlichen verallgemeinerten Inzidenzstruktur bilden eine taktische Zerlegung.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß die Transitivitätsklassen (oder „Transitivitätsgebiete“ oder „Transitivitätsbereiche“; für die Definition dieses und anderer Begriffe aus der Theorie der Permutationsgruppen vergleiche man etwa WIELANDT [15]) entweder nur Punkte oder nur Geraden enthalten. Sei $\mathfrak{P}$ eine Punkttransitivitätsklasse und $\mathfrak{g}$ eine Geradentransitivitätsklasse. Wir müssen zeigen, daß die von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{g}$ gebildete Teilstruktur eine taktische Konfiguration ist. Dazu genügt es aus Dualitätsgründen, zu beweisen, daß jede Gerade von $\mathfrak{g}$ gleichviele Punkte von $\mathfrak{P}$ trägt. Das aber folgt sofort aus der für alle Kollineationen σ gültigen trivialen Tatsache, daß m Punkte $P_1, P_2, \dots, P_m$ genau dann auf einer Geraden g liegen, wenn ihre Bilder $P_1^\sigma, P_2^\sigma, \dots, P_m^\sigma$ auf g^σ liegen.

In der vorliegenden Arbeit werden taktische Zerlegungen einer speziellen Klasse von Inzidenzstrukturen untersucht, die wir jetzt definieren: Eine λ -Ebene ist eine taktische Konfiguration $\mathfrak{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ mit $r = k \neq 0$ sowie

$$|I \cap (P \times \mathcal{G}) \cap (Q \times \mathcal{G})| = \lambda < k$$

für jedes Paar verschiedener Punkte P, Q . Die Gesamtzahl der Punkte von $\mathfrak{G}$, die wegen (1) und $r = k$ auch gleich der der Geraden ist, wird mit v bezeichnet. Man kann zeigen (vgl. etwa [12], S. 288), daß für jede λ -Ebene weiterhin

$$|I \cap (\mathcal{P} \times g) \cap (\mathcal{P} \times h)| = \lambda$$

gilt; in einer λ -Ebene haben je zwei verschiedene Punkte also genau λ Verbindungsgeraden und je zwei verschiedene Geraden genau λ Schnittpunkte. Ferner besteht die Beziehung

$$(2) \quad k(k-1) = \lambda(v-1).$$

Unter der *Ordnung* einer λ -Ebene $\mathfrak{G}$ verstehen wir die Zahl $n = k - \lambda$. Im Falle $n = 1$ ist die Struktur von $\mathfrak{G}$ durch die Angabe von v eindeutig bestimmt: aus (2) folgt $k = v - 1$ und $\lambda = v - 2$, und die Punkte und Geraden lassen sich so numerieren, daß $I = \mathcal{P} \times \mathcal{G} - \{(P_1, g_1), (P_2, g_2), \dots, (P_v, g_v)\}$ wird. Wir wollen daher den Fall $n = 1$ von nun an ausschließen und unter einer λ -Ebene stets eine solche mit $n \geq 2$ verstehen. Es gilt sodann stets $0 < \lambda < k - 1 < v - 1$. Aus (2) folgt weiter die später benötigte Beziehung

$$(3) \quad k^2 = (n + \lambda)^2 = n + \lambda v.$$

Wir bemerken noch, daß die λ -Ebenen mit $\lambda = 1$ gerade die (nichtausgearteten) endlichen projektiven Ebenen sind.

Jede λ -Ebene besitzt taktische Zerlegungen, nämlich einmal die, deren sämtliche Klassen aus je einem Element bestehen, und zum anderen die aus nur zwei Klassen (der aller Punkte und der aller Geraden) bestehende Zerlegung. Diese beiden Typen von taktischen Zerlegungen wollen wir *triviale Zerlegungen* nennen.

Man könnte meinen, daß jede taktische Zerlegung gemäß Satz 1 von einer Kollineationsgruppe erzeugt wird. Daß das nicht der Fall ist, zeigt schon das Beispiel der trivialen Zerlegung mit nur zwei Klassen bei einer endlichen projektiven Ebene über einem echten Fastkörper. Jede solche Ebene besitzt nämlich eine ausgezeichnete Gerade, für die als Achse der kleine Satz des DESARGUES gilt; diese Gerade muß bei jeder Kollineation festbleiben, da die Ebene sonst — nach HALL [7], S. 25 — eine Moufang-Ebene (Definition in [12], S. 186), also wegen der Endlichkeit sogar desarguessch und somit keine Ebene über einem *echten* Fastkörper wäre. Aber auch nichttriviale taktische Zerlegungen brauchen nicht von Kollineationsgruppen herzurühren, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige nicht-desarguessche endliche projektive Ebene der Ordnung n , ferner (Z, a) ein inzidentes Paar von $\mathfrak{G}$ derart, daß $\mathfrak{G}$ nicht (Z, a) -transitiv ist. (Vgl. BAER [1]. Ein solches Paar existiert

immer, da die Ebene sonst desarguessch wäre.) Wir numerieren die Punkte $\neq Z$ von a und die Geraden $\neq a$ durch Z irgendwie von 1 bis n : $P_1, P_2, \dots, P_n$; $g_1, g_2, \dots, g_n$ und definieren folgende Punkt- und Geradenklassen: $\mathfrak{P}_i = \{P_i\}$, $\mathfrak{g}_i = \{g_i\}$, $\mathfrak{P}_{n+i} = \{\text{Punkte } \neq Z \text{ von } g_i\}$, $\mathfrak{g}_{n+i} = \{\text{Geraden } \neq a \text{ durch } P_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; und $\mathfrak{P}_{2n+1} = \{Z\}$, $\mathfrak{g}_{2n+1} = \{a\}$. Man verifiziert ohne Schwierigkeit, daß so eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$ definiert wird. Diese kann aber nicht von einer Kollineationsgruppe herrühren, denn eine solche müßte aus zentralen Kollineationen mit Zentrum Z und Achse a bestehen und transitiv auf den Punkten $\neq Z$ jeder der Geraden g_i sein. Das aber würde heißen, daß die Ebene doch (Z, a) -transitiv wäre, entgegen unserer Voraussetzung.

Im folgenden bezeichnen wir taktische Zerlegungen meist durch das Symbol Γ , dementsprechend reden wir auch von den „ Γ -Klassen“ einer λ -Ebene. Für den Fall, daß die Zerlegung gemäß Satz 1 von einer Kollineationsgruppe herrührt, werden wir das Symbol Γ auch zur Bezeichnung dieser Gruppe verwenden; das wird nirgends zu Mißverständnissen führen.

1.2. Die Grundgleichungen

Es sei nun eine beliebige taktische Zerlegung einer beliebigen λ -Ebene der Ordnung n gegeben. Wir wollen eine Anzahl von Beziehungen herleiten, die zwischen den Zahlen $|\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{x}|$, $(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$ und den Invarianten v, k, λ, n der Ebene immer bestehen müssen, nämlich die folgenden

Grundgleichungen:

$$(G\ 1) \quad (\mathfrak{P}\mathfrak{g})|\mathfrak{g}| = (\mathfrak{g}\mathfrak{P})|\mathfrak{P}| \quad \text{für alle } \mathfrak{P}, \mathfrak{g}.$$

$$(G\ 2) \quad \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{x}\mathfrak{P}) = \sum_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{X}\mathfrak{g}) = k \quad \text{für alle } \mathfrak{P}, \mathfrak{g}.$$

$$(G\ 3) \quad \sum_{\mathfrak{X}} |\mathfrak{X}| = \sum_{\mathfrak{x}} |\mathfrak{x}| = v.$$

$$(G\ 4a) \quad \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P}\mathfrak{x})(\mathfrak{x}\mathfrak{Q}) = \lambda|\mathfrak{P}| + n\delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \quad \text{für alle } \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}.$$

$$(G\ 4b) \quad \sum_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{g}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}\mathfrak{h}) = \lambda|\mathfrak{g}| + n\delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \quad \text{für alle } \mathfrak{g}, \mathfrak{h}.$$

Dabei soll die Funktion δ wie üblich die Werte Eins oder Null annehmen, je nachdem ob ihre Argumente gleich oder verschieden sind.

(G 1) ist genau die Gl. (1) mit der auf S. 62 eingeführten Bezeichnungsweise. (G 2) und (G 3) folgen sofort aus den Tatsachen, daß jedes Element mit genau k andersartigen inzidiert und daß die Anzahl aller gleichartigen Elemente v ist. Also bleiben nur die Beziehungen (G 4) zu beweisen, und dazu genügt es aus Dualitätsgründen, nur (G 4a) herzuleiten.

Es sei Q ein beliebiger Punkt der Punktklasse $\mathfrak{Q}$ und g eine Gerade durch Q , die der Geradenklasse $\mathfrak{x}$ angehören möge. Auf g liegen $(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) - \delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ von Q verschiedene Punkte der Punktklasse $\mathfrak{P}$, welche von $\mathfrak{Q}$ nicht verschieden zu sein braucht, und durch Q gehen $(\mathfrak{x}\mathfrak{Q})$ Geraden von $\mathfrak{x}$. Die Anzahl inzidenter Paare (P, x) mit $x \cap Q \neq P \in \mathfrak{P}$ und $x \in \mathfrak{x}$ ist also gleich $[(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) - \delta(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})](\mathfrak{x}\mathfrak{Q})$.

Durch Summation über alle Geradenklassen (diejenigen Geradenklassen η , die keine Geraden durch Q schicken, geben dabei wegen $(\eta\Omega)=0$ keinen Beitrag) erhält man die Anzahl aller inzidenten Paare (P, z) mit $z \in Q \neq P \in \mathfrak{P}$. Diese ist aber, da jeder der $|\mathfrak{P}| - \delta(\mathfrak{P}, \Omega)$ von Q verschiedenen Punkte von $\mathfrak{P}$ mit Q genau λ Verbindungsgeraden hat, auch gleich $\lambda[|\mathfrak{P}| - \delta(\mathfrak{P}, \Omega)]$. Damit haben wir die Beziehung

$$\lambda[|\mathfrak{P}| - \delta(\mathfrak{P}, \Omega)] = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) - \delta(\mathfrak{P}, \Omega)] (\mathfrak{x}\Omega),$$

aus der (G 4a) durch triviale Umformungen mit (G 2) folgt.

Für später brauchen wir noch die folgenden Gleichungen:

$$(4) \quad \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P}\mathfrak{x}) |\mathfrak{x}| = k |\mathfrak{P}|, \quad \sum_{\mathfrak{x}} (g\mathfrak{x}) |\mathfrak{x}| = k |g|;$$

man erhält sie sofort aus (G 1) durch Summation und Benutzung von (G 2).

1.3. Anzahl der K'lassen einer taktischen Zerlegung

Aus den Grundgleichungen ergibt sich leicht der folgende wichtige Satz:

Satz 2. Die Anzahl der Punktklassen einer taktischen Zerlegung einer λ -Ebene ist gleich der ihrer Geradenklassen.

Beweis. Man setze $\mathfrak{P} = \Omega = \mathfrak{X}$ in (G 4a) und summiere über alle $\mathfrak{X}$, wegen (G 3) folgt

$$(5) \quad \sum_{\mathfrak{x}, \mathfrak{X}} (\mathfrak{X}\mathfrak{x}) (\mathfrak{x}\mathfrak{X}) = \lambda v + nt,$$

wobei t die Anzahl der Punktklassen bezeichnet. Dual erhält man aus (G 4b), daß die in (5) links stehende Summe auch gleich $\lambda v + nt'$ ist, mit t' gleich der Anzahl der Geradenklassen. Also folgt $t=t'$, q.e.d.

Die Anzahl der Punktklassen einer taktischen Zerlegung Γ , d.h. also auch die der Geradenklassen, wird von nun an durch das Symbol $t=t(\Gamma)$ bezeichnet.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt bei $t(\Gamma)=1$ sofort:

Satz 3. Eine Kollineationsgruppe einer λ -Ebene ist genau dann auf den Punkten transitiv, wenn sie auf den Geraden transitiv ist.

Tiefer liegt der entsprechende Satz über zweifache Transitivität:

Satz 4. Eine Kollineationsgruppe einer λ -Ebene ist genau dann auf den Punkten zweifach transitiv, wenn sie auf den Geraden zweifach transitiv ist.

Beweis. Wir treffen zunächst folgende Verabredungen: Ist G eine beliebige Permutationsgruppe der Menge M , so werde die Untergruppe aller derjenigen Permutationen von G , die ein bestimmtes Element $x \in M$ festlassen, mit G_x bezeichnet. Weiter soll x^U die Menge aller x^σ mit $\sigma \in U \subseteq G$ bedeuten. Sodann gilt, wie wir hier ohne Beweis bemerken (man vergleiche etwa WIELANDT [15], S. 9):

$$(6) \quad |G| = |G_x| |x^G|.$$

Es sei nun Γ eine Kollineationsgruppe einer λ -Ebene $\mathfrak{E}$, die auf der Menge $\mathscr{P}$ der Punkte von $\mathfrak{E}$ zweifach transitiv ist. Sodann ist Γ sicher transitiv auf $\mathscr{P}$, also nach Satz 3 auch transitiv auf der Menge $\mathscr{G}$ der Geraden von $\mathfrak{E}$. Folglich ist $|P^\Gamma| = |g^\Gamma| = v$ für alle $P \in \mathscr{P}$, $g \in \mathscr{G}$. Nach (6) ist daher auch $|I_P| = |I_g|$. Anwendung von (6) auf die Gruppen I_P , I_g ergibt nun wegen $(I_P)_g = I_P \cap I_g = (I_g)_P$ die Beziehung

$$(7) \quad |P^{I_g}| = |g^{I_P}|.$$

Da Γ zweifach transitiv auf $\mathscr{P}$ ist, ist jede I_P noch transitiv auf den von P verschiedenen Punkten von $\mathscr{P}$, d.h. die taktische Zerlegung I_P hat zwei Punktklassen. Also hat sie nach Satz 2 auch zwei Geradenklassen; eine von diesen muß aus den k Geraden durch P , die andere aus den $v - k$ übrigen Geraden bestehen. Aus (7) folgt nun, daß für eine feste Gerade g die Zahl $|P^{I_g}|$ gleich k ist, wenn $P \in g$, und gleich $v - k$, wenn $P \notin g$. Die Gruppe I_g zerlegt $\mathscr{P}$ also in zwei Punktklassen. Also folgt aus Satz 2, daß I_g die Menge $\mathscr{G}$ in zwei Geradenklassen zerlegt. Von diesen besteht eine aus g allein, also ist I_g transitiv auf den von g verschiedenen Geraden. Das bedeutet aber zusammen mit der Transitivität von Γ auf $\mathscr{G}$, daß Γ zweifach transitiv auf $\mathscr{G}$ ist. Da es aus Dualitätsgründen genügt, nur diesen Beweis zu liefern, ist Satz 4 damit bewiesen.

1.4. Beziehungen zwischen verschiedenen taktischen Zerlegungen

Wir kehren nun zu beliebigen taktischen Zerlegungen von λ -Ebenen zurück. Wir beweisen zunächst einige zahlentheoretische Eigenschaften der Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{X}\mathfrak{X})$, $|\mathfrak{X}|$, $|\mathfrak{Y}|$.

Es sei Γ eine taktische Zerlegung der λ -Ebene $\mathfrak{E}$ der Ordnung n mit $t(\Gamma) \geq 2$, und es seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ vier verschiedene Γ -Klassen. Wir definieren D als den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{g}) - (\mathfrak{X}\mathfrak{h})$, ferner d als den g.g.T. aller $(\mathfrak{X}\mathfrak{P}) - (\mathfrak{X}\mathfrak{Q})$, $D' = \text{g.g.T. aller } (\mathfrak{g}\mathfrak{X}) - (\mathfrak{h}\mathfrak{X})$ und $d' = \text{g.g.T. aller } (\mathfrak{P}\mathfrak{X}) - (\mathfrak{Q}\mathfrak{X})$. Sodann gilt:

Lemma 1. (a) D und d , und im Falle $t(\Gamma) > 2$ auch D' und d' , sind Teiler von n .

(b) Es gilt stets:

$$(8) \quad \begin{cases} n \equiv \lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv k(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \pmod{d'} \\ n \equiv \lambda(|\mathfrak{g}| - |\mathfrak{h}|) \equiv k(|\mathfrak{g}| - |\mathfrak{h}|) \pmod{D'} \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \varepsilon \lambda(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv \varepsilon k(|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv 0 \pmod{d'} \\ \varepsilon \lambda(|\mathfrak{g}| - |\mathfrak{h}|) \equiv \varepsilon k(|\mathfrak{g}| - |\mathfrak{h}|) \equiv 0 \pmod{D'} \end{cases}$$

$$\text{mit } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t(\Gamma) > 2 \\ 2 & \text{wenn } t(\Gamma) = 2. \end{cases}$$

(c) Ist $t(\Gamma) = 2$, so sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ die einzigen Γ -Klassen, und es gilt

$$(10) \quad n = [(\mathfrak{P}\mathfrak{g}) - (\mathfrak{P}\mathfrak{h})][(\mathfrak{g}\mathfrak{P}) - (\mathfrak{g}\mathfrak{Q})].$$

Beweis. Nach (G 4a) ist

$$n = \lambda |\mathfrak{P}| + n - \lambda |\mathfrak{P}| = \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P} \mathfrak{x}) [(x \mathfrak{P}) - (x \mathfrak{Q})] \equiv 0 \bmod d,$$

und analog folgt, daß D Teiler von n ist. Ist $t(\Gamma) > 2$, so existiert außer $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ noch eine weitere Punktklasse $\mathfrak{R}$; mit dieser erhält man

$$\lambda (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q} \mathfrak{x})] (x \mathfrak{R}) \equiv 0 \bmod d'$$

[womit die erste Kongruenz (9) für $t > 2$ bewiesen ist], und daraus folgt

$$n \equiv n + \lambda (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q} \mathfrak{x})] (x \mathfrak{P}) \equiv 0 \bmod d'.$$

Also ist auch d' Teiler von n . Für D' läuft der Beweis dual. Damit ist (a) bewiesen.

Es sei nun $t(\Gamma) = 2$. Sodann erhält man wie oben

$$\lambda (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) + n = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q} \mathfrak{x})] (x \mathfrak{P}) \equiv 0 \bmod d'$$

und

$$\lambda (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) - n = \sum_{\mathfrak{x}} [(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q} \mathfrak{x})] (x \mathfrak{Q}) \equiv 0 \bmod d';$$

daraus folgt durch Addition und Subtraktion

$$2n = 2\lambda (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv 0 \bmod d'.$$

Hieraus ergibt sich nun

$$2k (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) = 2(n + \lambda) (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \equiv 0 \bmod d',$$

womit die erste Kongruenz (9) auch für $t(\Gamma) = 2$ bewiesen ist. Der Beweis der zweiten Kongruenz (9) verläuft dual. Wegen $k = n + \lambda$ ist damit im Falle $t(\Gamma) > 2$ auch (8) erledigt, es bleibt also (8) für $t(\Gamma) = 2$ zu beweisen. Wie oben gezeigt, gilt $2n \equiv 0 \bmod d'$ und $\lambda (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) + n \equiv 0 \bmod d'$, folglich ist $n \equiv \lambda (|\mathfrak{P}| - |\mathfrak{Q}|) \bmod d'$. Der verbleibende Teil von (8) folgt wieder aus $k = n + \lambda$. Damit ist (b) bewiesen.

Im Falle $t(\Gamma) = 2$ gilt nach (G 4a), daß

$$n = (\mathfrak{P} \mathfrak{g}) [(g \mathfrak{P}) - (g \mathfrak{Q})] + (\mathfrak{P} \mathfrak{h}) [(h \mathfrak{P}) - (h \mathfrak{Q})]$$

ist. Andererseits ist $(h \mathfrak{P}) - (h \mathfrak{Q}) = -[(g \mathfrak{P}) - (g \mathfrak{Q})]$ wegen (G 2). Kombination dieser Beziehungen ergibt (10). Damit ist Lemma 1 vollständig bewiesen.

Lemma 2. Ist Γ eine taktische Zerlegung einer beliebigen λ -Ebene mit $(\Gamma) \geq 2$, und sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ vier verschiedene Γ -Klassen, so gibt es unter den Zahlen $(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q} \mathfrak{x})$ und unter den Zahlen $(\mathfrak{g} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{h} \mathfrak{x})$ mindestens je eine, und unter den Zahlen $(x \mathfrak{P}) - (x \mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{x} \mathfrak{g}) - (\mathfrak{x} \mathfrak{h})$ mindestens je zwei von Null verschiedene.

Beweis. Wären z.B. alle $(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{Q} \mathfrak{x}) = 0$, so würden (8) und (9) „in modulo Null“ gelten, d.h. man könnte in (8) und (9) das Kongruenzzeichen durch das

Gleichheitszeichen ersetzen. Das würde in (9) wegen $\varepsilon\lambda \neq 0$ ergeben, daß $|\mathfrak{P}| = |\mathfrak{Q}|$ wäre, also würde aus (8) folgen, daß $n = 0$ ist, ein Widerspruch. Daß es unter den $(x\mathfrak{P}) - (x\mathfrak{Q})$ sogar zwei von Null verschiedene geben muß, folgt aus (G 2): es ist

$$\sum_x [(x\mathfrak{P}) - (x\mathfrak{Q})] = k - k = 0;$$

verschwinden in dieser Summe alle Glieder bis auf eines, so muß auch dieses letzte verschwinden, und das haben wir schon als unmöglich erkannt. Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Das wesentliche Ergebnis des vorliegenden Paragraphen ist der folgende Satz, der es erlaubt, in der Menge aller taktischen Zerlegungen einer λ -Ebene auf natürliche Weise eine teilweise Ordnung einzuführen:

Satz 5. *Es seien Γ und Γ' zwei (nicht notwendig verschiedene) taktische Zerlegungen derselben λ -Ebene. Sodann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

(i) *Zu jeder Γ -Punktklasse $\mathfrak{P}$ existiert eine Γ' -Punktklasse $\mathfrak{P}'$ derart, daß $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$.*

(ii) *Zu jeder Γ -Geradenklasse g existiert eine Γ' -Geradenklasse g' derart, daß $g \subseteq g'$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß (ii) aus (i) folgt. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine λ -Ebene mit zwei taktischen Zerlegungen Γ und Γ' , für die (i), aber nicht (ii) gilt, d. h. es gäbe eine Γ -Geradenklasse g und zwei verschiedene Γ' -Geradenklassen g'_1 und g'_2 derart, daß $g \cap g'_i \neq \emptyset$, für $i = 1, 2$. Wir werden diese Möglichkeit ad absurdum führen.

Wir zeigen zunächst, daß für diese Geradenklassen und beliebige Γ' -Punktklassen $\mathfrak{X}'$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $(\mathfrak{X}' g'_1)' \neq 0$,

(b) $(\mathfrak{X}' g'_2)' \neq 0$.

(c) Es existiert eine Γ -Punktklasse $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}'$ mit $(\mathfrak{X} g) \neq 0$.

Sei $i = 1$ oder 2 und $(\mathfrak{X}' g'_i)' \neq 0$, ferner $g \in g \cap g'_i$. Auf g liegen Punkte von $\mathfrak{X}'$; sei P ein solcher und $\mathfrak{X}$ die durch ihn bestimmte Γ -Punktklasse. Wegen (i) ist sodann $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}'$; ferner ist $(\mathfrak{X} g) \neq 0$, da $g \in g$ und $g \nmid P \in \mathfrak{X}$. Also folgt (c) aus jeder der Aussagen (a), (b).

Ist umgekehrt $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}'$ und $(\mathfrak{X} g) \neq 0$, so enthält jede Gerade von g Punkte von $\mathfrak{X}$, also erst recht solche von $\mathfrak{X}'$; ist also $g_i \in g \cap g'_i$, so enthält g_i Punkte von $\mathfrak{X}'$. Daher ist $(\mathfrak{X}' g'_i)' \neq 0$, $i = 1, 2$. Also folgen sowohl (a) als auch (b) aus (c), und die Äquivalenz von (a), (b), (c) ist bewiesen.

Nach Lemma 2 gibt es nun eine Γ' -Punktklasse $\mathfrak{P}'$, für die $(\mathfrak{P}' g'_1)' \neq (\mathfrak{P}' g'_2)'$ gilt. Eine dieser beiden Zahlen ist von Null verschieden, also wegen der Äquivalenz von (a) und (b) auch die andere. Wegen der Äquivalenz von (a) und (b) mit (c) folgt weiter die Existenz gewisser Γ -Punktklassen $\mathfrak{P}_j \subseteq \mathfrak{P}'$, mit $j = 1, 2, \dots, h$; $h \geq 1$, für die $(\mathfrak{P}_j g) \neq 0$ gilt. Für alle von den $\mathfrak{P}_j$ verschiedenen Γ -Punktklassen $\mathfrak{X}$ gilt wegen (i) und (a), (b), (c) entweder $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{P}' = \emptyset$

oder $(\mathfrak{X}g) = 0$. Ist nun $g_i \in g \cap g'_i$, $i = 1, 2$, so liegen auf g_1 wie auf g_2 genau $(\mathfrak{P}_j g)$ Punkte von $\mathfrak{P}_j$, und aus den angegebenen Eigenschaften der $\mathfrak{P}_j$ folgt

$$(\mathfrak{P}' g'_1)' = \sum_{j=1}^h (\mathfrak{P}_j g) = (\mathfrak{P}' g'_2)',$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $(\mathfrak{P}' g'_1)' \neq (\mathfrak{P}' g'_2)'$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes ist nachstehende

Folgerung. Stimmen zwei taktische Zerlegungen derselben λ -Ebene in den Punktklassen oder in den Geradenklassen überein, so sind sie identisch.

2. Die abgeleitete Struktur $\mathfrak{G}/\Gamma$

2.1. Definitionen

Es sei $\mathfrak{G}$ eine λ -Ebene der Ordnung n und Γ eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{G}$. Wir definieren: Zwei ungleichartige Γ -Klassen $\mathfrak{P}$ und g bilden ein *inzidentes Paar* oder ein *nichtinzidentes Paar*, je nachdem ob $(\mathfrak{P}g) \neq 0$ oder $= 0$ ist. [Wegen (G 1) könnte man auch $(g\mathfrak{P}) \neq 0$ bzw. $(g\mathfrak{P}) = 0$ zur Definition benutzen.] Bezüglich der so definierten Inzidenzrelation werden die Γ -Klassen von $\mathfrak{G}$ zu den Elementen einer neuen endlichen verallgemeinerten Inzidenzstruktur; diese nennen wir die *nach Γ abgeleitete Struktur* von $\mathfrak{G}$ und bezeichnen sie mit $\mathfrak{G}/\Gamma$. Die Struktur $\mathfrak{G}/\Gamma$ besitzt $t(\Gamma)$ „Punkte“ und ebensoviele „Geraden“. Da wir bei den nachfolgenden Untersuchungen stets die zugrundeliegende λ -Ebene $\mathfrak{G}$ sowie die taktische Zerlegung Γ im Auge behalten wollen, werden wir die Elemente von $\mathfrak{G}/\Gamma$ nicht „Punkte“ und „Geraden“, sondern weiterhin „Punktklassen“ und „Geradenklassen“ nennen und dementsprechend auch von „Schnittklassen“ und „Verbindungsklassen“ reden.

Wir werden später sehen (vgl. das Beispiel S. 77), daß $\mathfrak{G}/\Gamma$ keineswegs wieder eine λ' -Ebene zu sein braucht. Insbesondere können verschiedene Γ -Klassen mit verschieden vielen andersartigen inzidieren, und verschiedene Paare von Punkt- bzw. Geradenklassen können verschieden viele Verbindungs- bzw. Schnittklassen besitzen. Um für das weitere eine bequeme Sprechweise zu besitzen, definieren wir die Zahlen $[\mathfrak{X}]$ bzw. $[x]$ als die Anzahlen von mit $\mathfrak{X}$ bzw. x inzidenten Geraden- bzw. Punktklassen, und die Zahlen $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ bzw. $[x, y]$ als die Anzahlen von Verbindungsklassen von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bzw. von Schnittklassen von x und y , wobei natürlich $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{Y}$ und $x \neq y$ sein soll. Es ist klar, daß $[\mathfrak{X}]$ und $[x]$ stets ≥ 1 sind. Daß auch $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$ und $[x, y]$ stets ≥ 1 sind, ist leicht zu sehen: Eine Verbindungsgerade eines Punktes von $\mathfrak{X}$ mit einem Punkt von $\mathfrak{Y}$ spannt eine Verbindungsklasse von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf; und die Existenz von Schnittklassen folgt aus der dualen Überlegung. Für den Fall der Eindeutigkeit der Verbindungsklasse von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bzw. der Schnittklasse von x und y wollen wir diese durch $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bzw. durch x und y eindeutig bestimmten Γ -Klassen mit $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}$ bzw. $x \cap y$ bezeichnen. Der Gebrauch dieser Symbole soll umgekehrt die Eindeutigkeit mit ausdrücken.

2.2. Der Hauptsatz

Wir werden nun zeigen, daß die Eindeutigkeit von Schnitt und Verbindung in $\mathfrak{G}/\Gamma$ ein recht selten auftretendes Phänomen ist:

Satz 6. Sind Schnitte und Verbindungen in der abgeleiteten Struktur $\mathfrak{G}/\Gamma$ einer λ -Ebene $\mathfrak{G}$ nach einer taktischen Zerlegung Γ mit $t(\Gamma) > 3$ eindeutig, so ist $\lambda = 1$, also $\mathfrak{G}$ eine projektive Ebene. Ist auch $\mathfrak{G}/\Gamma$ eine (nichtausgeartete) projektive Ebene, so besteht jede Γ -Klasse aus einem Element, d.h. $\mathfrak{G}/\Gamma$ ist isomorph zu $\mathfrak{G}$.

Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus, aus denen wir außer Satz 6 noch andere Folgerungen werden ziehen können.

Lemma 3. Es seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, g, h$ vier verschiedene Klassen einer taktischen Zerlegung einer λ -Ebene. Dann gilt:

Die folgenden Eigenschaften von $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ und g sind äquivalent:

- (i) $g = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$
- (ii) $\lambda |\mathfrak{P}| = (\mathfrak{P}g)(g\mathfrak{Q})$
- (iii) $\lambda |\mathfrak{Q}| = (\mathfrak{Q}g)(g\mathfrak{P})$
- (iv) $\lambda |g| = (g\mathfrak{P})(g\mathfrak{Q})$.

Die folgenden Eigenschaften von g, h und $\mathfrak{P}$ sind äquivalent:

- (i') $\mathfrak{P} = g \cap h$
- (ii') $\lambda |g| = (g\mathfrak{P})(\mathfrak{P}h)$
- (iii') $\lambda |h| = (h\mathfrak{P})(\mathfrak{P}g)$
- (iv') $\lambda |\mathfrak{P}| = (\mathfrak{P}g)(\mathfrak{P}h)$.

Beweis. Aus Dualitätsgründen genügt es, die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iv) zu beweisen. Ist $g = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, so ist insbesondere $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{Q}$, und aus (G 4a) folgt $\lambda |\mathfrak{P}| = \sum_x (\mathfrak{P}x)(x\mathfrak{Q})$. Da g eindeutige Verbindungsklasse ist, gilt für alle $x \neq g$ entweder $(\mathfrak{P}x) = 0$ oder $(x\mathfrak{Q}) = 0$. Also folgt (ii). Ebenso folgt (iii) aus (i). Umgekehrt ergibt (G 4a) zusammen mit (ii) bzw. (iii), daß g eindeutige Verbindungsklasse von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ist. Damit ist die Gleichwertigkeit der Aussagen (i), (ii), (iii) bewiesen. Multiplikation von (ii) mit $|g|$ und Anwendung von (G 4) auf die rechte Seite ergibt nach Heraus Kürzen von $|\mathfrak{P}|$ die Gl. (iv), und analog folgt (ii) aus (iv). Damit ist alles bewiesen.

Für das weitere benötigen wir noch nachstehende

Folgerung. Aus $g = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P} = g \cap h$ folgt $(\mathfrak{P}h) = (g\mathfrak{Q})$.

Das ergibt sich unmittelbar durch Vergleich von (iv) und (ii').

Lemma 4. Sind Schnitte und Verbindungen in $\mathfrak{G}/\Gamma$ eindeutig und ist $t(\Gamma) > 2$, so gibt es in $\mathfrak{G}/\Gamma$ ein nicht-ausgeartetes Dreieck.

Beweis. Wäre das nicht der Fall, so müßten alle Punktklassen mit derselben Geradenklasse g und alle Geradenklassen mit derselben Punktklasse $\mathfrak{P}$ inzident sein; und $\mathfrak{P}$ und g wären die einzigen Γ -Klassen, die mit mehr als einer andersartigen inzidieren. Wegen $t(\Gamma) > 2$ müßte es nun zwei Punktklassen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ geben, die mit keiner anderen Geradenklasse als g inzident sind, d.h. es müßte gelten $(g\mathfrak{X}) = (g\mathfrak{Y}) = k$. Einerseits würde nun aus Lemma 3, (ii) folgen, daß $\lambda |\mathfrak{X}| = (\mathfrak{X}g)(g\mathfrak{Y}) = k(\mathfrak{X}g)$, andererseits ergibt (G 4a), daß

$\lambda|\mathfrak{X}| = (\mathfrak{X}g)(g\mathfrak{X}) - n = k(\mathfrak{X}g) - n$ ist. Das ist ein Widerspruch, der Lemma 4 beweist.

Das folgende Lemma 5 ist das Kernstück des Beweises von Satz 6:

Lemma 5. *Es sei Γ eine taktische Zerlegung der λ -Ebene $\mathfrak{E}$ der Ordnung n . Gibt es sodann eine Γ -Klasse, die mit allen gleichartigen Γ -Klassen eindeutige Verbindungs- bzw. Schnittklassen besitzt und die mit mindestens drei andersartigen Klassen inzidiert, von denen ihrerseits mindestens zwei außer mit der gegebenen noch mit einer weiteren inzident sind, so ist $\lambda = 1$ und die gegebene Γ -Klasse besteht entweder aus einem oder aus n^2 Elementen. Im letzteren Falle gibt es genau eine mit der gegebenen nicht inzidierende andersartige Klasse, und diese besteht aus einem Element.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die gegebene Γ -Klasse als Punktklasse $\mathfrak{P}$ angenommen werden. Die Voraussetzungen über $\mathfrak{P}$ besagen dann:

- (a) $[\mathfrak{P}, \mathfrak{X}] = 1$ für alle $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{P}$,
- (b) $[\mathfrak{P}] > 2$.
- (c) Es gibt zwei verschiedene Geradenklassen g und h mit $(\mathfrak{P}g) \neq 0 \neq (\mathfrak{P}h)$ und $[g] > 1 < [h]$.

Das bedeutet, daß es in $\mathfrak{E}/\Gamma$ eine aus $\mathfrak{P}$ und zwei weiteren Punktklassen $\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ sowie aus g, h und einer weiteren Geradenklasse η bestehende Konfiguration gibt, deren Inzidenzen in Fig. 1 illustriert sind:

Alle Schnitte und Verbindungen in dieser Konfiguration sind eindeutig: $g \cap h = g \cap \eta = h \cap \eta = \mathfrak{P}$, $g = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, $h = \mathfrak{P} + \mathfrak{R}$. Wegen der Folgerung von Lemma 3 ergibt sich aus diesen Beziehungen: $(\mathfrak{P}h) = (g\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}\eta) = (h\mathfrak{R}) = (\mathfrak{P}g)$; alle diese Zahlen sind also gleich derselben von Null verschiedenen Konstanten j , und es ist bewiesen:

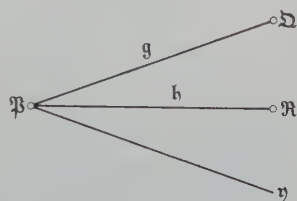


Fig. 1

Aus $(\mathfrak{P}x)(x\mathfrak{P}) \neq 0$ folgt $(\mathfrak{P}x) = (x\mathfrak{P}) = j$.

Nun ist nach Lemma 3, (ii) einerseits $\lambda|\mathfrak{P}| = (\mathfrak{P}g)(g\mathfrak{Q}) = j^2$, andererseits nach (G 4a) und (G 2) auch

$$\lambda|\mathfrak{P}| = \sum_x (\mathfrak{P}x)(x\mathfrak{P}) - n = j \sum_x (x\mathfrak{P}) - n = jk - n,$$

denn wegen (G 1) ist genau dann $(x\mathfrak{P}) = 0$, wenn $(\mathfrak{P}x) = 0$ ist. Also ergibt sich für j die quadratische Gleichung

$$j^2 - kj + n = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $j = (k \pm q)/2$, wobei $q^2 = k^2 - 4n$ ist. Es muß also $k \equiv q \pmod{2}$ und die Zahl $k^2 - 4n$ eine Quadratzahl sein.

Nun ist $q^2 = k^2 - 4n < k^2$, also $q \leq k - 1$. Andererseits ist wegen $k = n + \lambda$ auch $q^2 = (k - 2)^2 + 4(\lambda - 1) \geq (k - 2)^2$. Wäre nun $\lambda > 1$, so würde in der letzten Ungleichung nur das „Größer“-Zeichen gelten, und es ergäbe sich

$q \geq k-1$, d.h. mit dem oben gewonnenen Ergebnis zusammen $q = k-1$. Das aber ist ein Widerspruch zu $k \equiv q \pmod{2}$. Damit ist $\lambda = 1$ bewiesen.

Es folgt nun weiter $q = k-2 = n-1$, also $j = 1$ oder $j = n$. Aus $\lambda |\mathfrak{P}| = |\mathfrak{P}| - j^2$ ergibt sich also $|\mathfrak{P}| = 1$ oder $|\mathfrak{P}| = n^2$. Es bleibt zu zeigen, daß die Ebene im Falle $|\mathfrak{P}| = n^2$ genau eine Gerade enthält, auf der keine Punkte von $\mathfrak{P}$ liegen. Dazu benutzen wir die in 1.2. bewiesene Gleichung

$$(4) \quad \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P} \mathfrak{x}) |\mathfrak{x}| = k |\mathfrak{P}|.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist im vorliegenden Falle $j \sum_{(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) \neq 0} |\mathfrak{x}| = n \sum_{(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) \neq 0} |\mathfrak{x}|$, die rechte Seite ist $(n+1) n^2$. Es folgt $\sum_{(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) \neq 0} |\mathfrak{x}| = n(n+1)$, oder $\sum_{(\mathfrak{P} \mathfrak{x}) = 0} |\mathfrak{x}| = v - n(n+1) = 1$. Also gibt es nur eine Geradenklasse $\mathfrak{g}$ mit $(\mathfrak{P} \mathfrak{g}) = 0$, und diese besteht aus genau einer Geraden. Damit ist Lemma 5 vollständig bewiesen.

Beweis von Satz 6. Wegen Lemma 4 folgt aus der Voraussetzung $t(\Gamma) > 3$ die Existenz eines nichtausgearteten Dreiecks. Also ergibt sich: Entweder ist $\mathfrak{G}/\Gamma$ eine nichtausgeartete projektive Ebene, oder es gibt zwei ausgezeichnete Γ -Klassen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{g}$ mit den in Fig. 2 angedeuteten Inzidenzverhältnissen, insbesondere also mit $[\mathfrak{P}] > 2 < [\mathfrak{g}]$, da $t(\Gamma) > 3$.

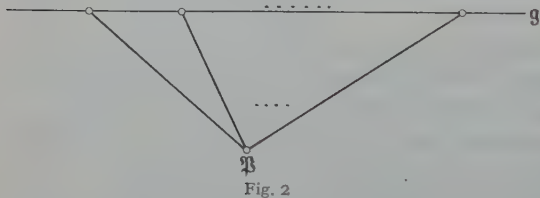


Fig. 2

In jedem Falle gibt es Γ -Klassen, die die Voraussetzungen von Lemma 5 erfüllen.

Also ist $\lambda = 1$ und $\mathfrak{G}$ eine projektive Ebene. Ist auch $\mathfrak{G}/\Gamma$ eine (nichtausgeartete) projektive Ebene, so kann keine Klasse mehr als ein Element enthalten, da es sonst nach Lemma 5 nur eine nicht mit ihr inzidente andersartige Γ -Klasse geben könnte. Das aber ist in einer nichtausgearteten projektiven Ebene nicht möglich. Damit ist Satz 6 bewiesen.

2.3. Ergänzungssätze

Während bisher die Frage im Vordergrund stand, unter welchen Umständen man aus der Voraussetzung der Eindeutigkeit von Schnitt und Verbindung in $\mathfrak{G}/\Gamma$ schließen kann, daß $\lambda = 1$ ist, wollen wir nun $\lambda = 1$ voraussetzen und untersuchen, was man über die Typen von taktischen Zerlegungen aussagen kann, deren abgeleitete Strukturen eindeutige Schnitte und Verbindungen haben. Wir werden zeigen (man vergleiche dazu die Definition von S. 63):

Satz 7. Die nichttrivialen taktischen Zerlegungen Γ mit $t(\Gamma) > 2$ einer projektiven Ebene der Ordnung n , deren abgeleitete Strukturen eindeutige Schnitte und Verbindungen haben, sind genau diejenigen, welche eine Klasse mit genau n^2 Elementen besitzen.

Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

Lemma 6. *Erfüllt die taktische Zerlegung Γ der endlichen projektiven Ebene $\mathfrak{G}$ die Bedingungen*

- (a) $t(\Gamma) = 3$,
- (b) $[\mathfrak{X}] = [\mathfrak{x}] = 2$ für alle $\mathfrak{X}, \mathfrak{x}$,
- (c) $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] = 1$ für alle $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, oder
 $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] = 1$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$,

so besteht eine Γ -Klasse aus n^2 Elementen.

Die beiden Eigenschaften (c) sind natürlich gleichwertig.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt zunächst, daß die abgeleitete Struktur $\mathfrak{G}/\Gamma$ ein nichtausgeartetes Dreieck ist. Wir bezeichnen die Punktklassen mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und die Geradenklassen mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ derart, daß

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{a}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{b}) = (\mathfrak{C} \mathfrak{c}) = 0$$

ist (vgl. Fig. 3).

Wir machen nun die Annahme

$$(*) \quad |\mathfrak{X}| > 1 < |\mathfrak{x}| \quad \text{für alle } \mathfrak{X}, \mathfrak{x}.$$

Dann folgt zunächst, daß jede Γ -Klasse drei Elemente in allgemeiner Lage enthalten muß, denn wären z.B. alle Punkte einer Punktklasse $\mathfrak{X}$ mit einer Geraden g kollinear, so müßte g eine Geradenklasse für sich bilden. Gäbe es nämlich noch eine weitere Gerade h in der von g aufgespannten Geradenklasse, so könnte auf dieser höchstens ein Punkt von $\mathfrak{X}$ liegen; das aber kann nicht sein, da ja g mehr als einen Punkt von $\mathfrak{X}$ enthält. Es sei nun b eine beliebige Gerade von $\mathfrak{b}$ und ferner $A \in \mathfrak{A}$ derart, daß $A \notin b$. Einen solchen Punkt gibt es, da $\mathfrak{A}$ drei Punkte in allgemeiner Lage enthält. Auf b liegen genau $(\mathfrak{C} \mathfrak{b})$ Punkte von $\mathfrak{C}$, und die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit A , die wegen $\lambda = 1$ eindeutig sind, müssen zu $\mathfrak{b}$ gehören, da sie Punkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ enthalten. Da sie alle durch denselben Punkt A gehen, folgt $(\mathfrak{b} \mathfrak{A}) \geq (\mathfrak{C} \mathfrak{b})$. Wegen Voraussetzung (c) ist nun die Folgerung von Lemma 3 anwendbar, sie ergibt $(\mathfrak{b} \mathfrak{A}) = (\mathfrak{C} \mathfrak{a})$. Also folgt $(\mathfrak{C} \mathfrak{a}) \geq (\mathfrak{C} \mathfrak{b})$, und aus Symmetriegründen muß sogar $(\mathfrak{C} \mathfrak{a}) = (\mathfrak{C} \mathfrak{b})$ gelten. Ebenso folgt $(\mathfrak{A} \mathfrak{b}) = (\mathfrak{A} \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{B} \mathfrak{c}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{a})$, und dual dazu $(\mathfrak{a} \mathfrak{B}) = (\mathfrak{a} \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{b} \mathfrak{C}) = (\mathfrak{b} \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{c} \mathfrak{A}) = (\mathfrak{c} \mathfrak{B})$. Wir zeigen nun, daß alle von Null verschiedenen $(\mathfrak{X} \mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x} \mathfrak{X})$ gleich derselben Konstanten r sind. Aus Symmetrie- und Dualitätsgründen braucht dazu nur noch z.B. $(\mathfrak{A} \mathfrak{c}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{c})$ bewiesen zu werden. Das geht mit der Folgerung von Lemma 3 und den oben gefundenen Beziehungen: $(\mathfrak{A} \mathfrak{c}) = (\mathfrak{A} \mathfrak{b}) = (\mathfrak{c} \mathfrak{B}) = (\mathfrak{c} \mathfrak{A}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{a}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{c})$. Aus Lemma 4, (ii) folgt nun wegen $\lambda = 1$, daß $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{x}| = r^2$, also $3r^2 = n^2 + n + 1$, ferner aus (G 2) und Voraussetzung (b): $2r = n + 1$. Kombination dieser beiden Beziehungen aber ergibt $n = 1$, wonach alle Γ -Klassen aus nur einem Element bestehen würden, im Widerspruch zu (*). Also gibt es eine Klasse mit nur einem Element, z.B. die Klasse $\mathfrak{a}$. Alle nicht auf der einzigen Geraden

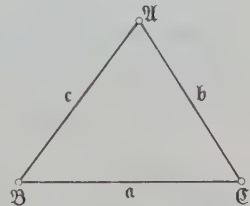


Fig. 3

von a liegenden Punkte gehören sodann zu nicht mit a inzidenten Punktklassen. Da es genau n^2 solche Punkte und genau eine solche Punktklasse, nämlich $\mathfrak{A}$, gibt, folgt daraus die Behauptung des Lemma 6.

Beweis von Satz 7. Ist zunächst Γ eine taktische Zerlegung mit einer Klasse — o.B.d.A. einer Punktklasse $\mathfrak{P}$ —, die n^2 Elemente enthält, so folgt wie beim Beweis von Lemma 5 mit Benutzung von (4), daß es genau eine Geradenklasse g gibt, die mit $\mathfrak{P}$ nicht inzidiert, und diese Geradenklasse besteht aus einem Element. Es ist nun klar, daß die von $\mathfrak{P}$ verschiedenen Punktklassen, die ja alle aus kollinearen Punkten bestehen müssen, sowohl unter sich als auch mit $\mathfrak{P}$ eindeutige Verbindungsklassen haben. Andernfalls nämlich müßte es außer der einzigen Geraden von g noch andere Verbindungsgeraden von nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Punkten geben, was in einer projektiven Ebene nicht möglich ist.

Sei nun umgekehrt Γ eine nichttriviale taktische Zerlegung mit eindeutigen Schnitt- und Verbindungsklassen. Wegen $t(\Gamma) > 2$ und Lemma 4 ist $\mathfrak{G}/\Gamma$ entweder vom Typ der Fig. 2 oder vom Typ der Fig. 3. Im ersteren Falle ist

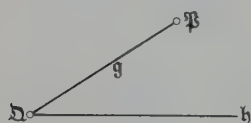


Fig. 4 a u. b



die Existenz einer Γ -Klasse mit n^2 Elementen durch Lemma 5, im letzteren durch Lemma 6 gesichert. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Satz 6 und 7 geben vollständige Auskunft über alle möglichen Typen von taktischen Zerlegungen Γ von projektiven Ebenen, deren

abgeleitete Strukturen wieder (eventuell ausgeartete) projektive Ebenen sind, vorausgesetzt, daß $t(\Gamma) > 2$ ist. Es liegt nun nahe, jetzt auch noch den Fall $t = 2$ zu untersuchen (der Fall $t = 1$ ist natürlich uninteressant) und festzustellen, unter welchen Umständen auch hier Schnitte und Verbindungen eindeutig sind. Für die abgeleitete Struktur $\mathfrak{G}/\Gamma$ sind offenbar nur noch zwei Typen möglich (vgl. Fig. 4), von denen der erste eindeutige Schnitte und Verbindungen hat.

Wir zeigen, daß in vielen Fällen auch für $t = 2$ noch die Aussage des Satzes 7 von der Existenz einer Klasse mit n^2 Elementen erhalten bleibt.

Satz 8. Sei Γ eine taktische Zerlegung einer projektiven Ebene der Primzahlordnung p derart, daß $t(\Gamma) = 2$. Dann sind Schnitte und Verbindungen in $\mathfrak{G}/\Gamma$ eindeutig, und eine der Γ -Klassen enthält n^2 Elemente.

Beweis. Es seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, g, h$ die Γ -Klassen. Dann gilt nach Lemma 1, Gl. (10) und wegen $n = p$, daß eine der Zahlen $|(\mathfrak{P}g) - (\mathfrak{P}h)|$, $|(g\mathfrak{P}) - (g\mathfrak{Q})|$ gleich p , die andere gleich 1 ist. O.B.d.A. nehmen wir $(\mathfrak{P}g) - (\mathfrak{P}h) = p$ und $(g\mathfrak{P}) - (g\mathfrak{Q}) = 1$ an. Nach (G 2) ist dann $p = (\mathfrak{P}g) - (\mathfrak{P}h) = p + 1 - (\mathfrak{Q}g) - (\mathfrak{P}h)$, $(\mathfrak{P}h) + (\mathfrak{Q}g) = 1$. Da sowohl $(\mathfrak{P}h)$ wie $(\mathfrak{Q}g)$ nicht negativ und ganzzahlig sind, muß eine dieser Zahlen verschwinden und die andere $= 1$ sein. Es folgt, daß Schnitte und Verbindungen in $\mathfrak{G}/\Gamma$ eindeutig sind, d. h. $\mathfrak{G}/\Gamma$ ist vom Typ der Fig. 4a. Denn in einer Struktur vom Typ der Fig. 4b müssen alle $(\mathfrak{X}x)$ und $(x\mathfrak{X})$ von Null verschieden sein, da jede Klasse mit jeder andersartigen inzidiert.

Ist nun $(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) = 1$ und $(\mathfrak{L}\mathfrak{g}) = 0$, so ist wegen (G 1) auch $(\mathfrak{g}\mathfrak{L}) = 0$, und es folgt $(\mathfrak{g}\mathfrak{P}) = 1$, da $(\mathfrak{g}\mathfrak{P}) - (\mathfrak{g}\mathfrak{L}) = 1$. Also ist $|\mathfrak{g}| - (\mathfrak{g}\mathfrak{P})(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) = 1$ nach Lemma 3, und es folgt $|\mathfrak{g}| = 1$. Ist $(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) = 0$ und $(\mathfrak{L}\mathfrak{g}) = 1$, so folgt $(\mathfrak{h}\mathfrak{P}) = 0$ wegen (G 1), und daraus $(\mathfrak{g}\mathfrak{P}) = p + 1$ wegen (G 2). Nun folgt weiter $p + 1 = (\mathfrak{g}\mathfrak{L}) + (\mathfrak{h}\mathfrak{L}) = (\mathfrak{g}\mathfrak{P}) - 1 + (\mathfrak{h}\mathfrak{L}) = p + (\mathfrak{h}\mathfrak{L})$, also ist $(\mathfrak{h}\mathfrak{L}) = 1$, und Lemma 3 ergibt nun wieder $|\mathfrak{h}| = (\mathfrak{h}\mathfrak{L})(\mathfrak{L}\mathfrak{g}) = 1$, also $|\mathfrak{h}| = 1$. In jedem Falle enthält also eine Γ -Klasse nur ein Element, woraus wie beim Beweis von Lemma 6 die Existenz einer Klasse mit n^2 -Elementen folgt, q.e.d.

Wir zeigen als nächstes, daß im allgemeinen aus $t(\Gamma) = 2$ nicht $\lambda = 1$ zu folgen braucht. Dazu betrachte man einen beliebigen endlichen dreidimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{R}$. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{R}$ als λ -Ebene $\mathfrak{E}$ aufgefaßt werden kann, wenn man unter den Punkten von $\mathfrak{E}$ die Punkte von $\mathfrak{R}$ und unter den „Geraden“ von $\mathfrak{E}$ die Ebenen von $\mathfrak{R}$ versteht, während Inzidenz in $\mathfrak{E}$ durch Inzidenz in $\mathfrak{R}$ erklärt ist. Für die so erhaltene λ -Ebene $\mathfrak{E}$ gilt $v = q^3 + q^2 + q + 1$, wobei q eine Primzahlpotenz ist, ferner $k = q^2 + q + 1$, $\lambda = q + 1$ und $n = q^2$. Insbesondere ist also $\lambda > 1$; aber es gibt eine taktische Zerlegung Γ mit $t(\Gamma) = 2$: Man betrachte einen festen Punkt P und definiere Punktklassen:

$$\mathfrak{P} = \{P\}, \quad \mathfrak{L} = \{\text{Alle Punkte} \neq P\}$$

und „Geraden“-klassen:

$$\mathfrak{g} = \{\text{Alle mit } P \text{ inzidenten Ebenen von } \mathfrak{R}\},$$

$$\mathfrak{h} = \{\text{Alle übrigen Ebenen von } \mathfrak{R}\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß diese Klasseneinteilung tatsächlich eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$ definiert. Die Werte der Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{X})$ und $(\mathfrak{X}\mathfrak{X})$ sind in folgendem Schema zusammengestellt:

$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{L}$
$\mathfrak{P}$	1	0	$\mathfrak{g}$	$q^2 + q + 1$	$q + 1$
$\mathfrak{L}$	$q^2 + q$	$q^2 + q + 1$	$\mathfrak{h}$	0	q^2

Wir zeigen nun weiter, daß die Aussagen von Satz 8 für zusammengesetzte n nicht mehr allgemein richtig sind. Wir werden für die beiden in Fig. 4 illustrierten Typen von abgeleiteten Strukturen $\mathfrak{E}/\Gamma$ mit $t(\Gamma) = 2$ Beispiele angeben, bei denen jede Klasse mehr als ein Element enthält. Die beiden zu behandelnden Klassen von Beispielen rühren von Teilebenen bzw. von Ovalen endlicher projektiver Ebenen her.

2.4. Durch Teilebenen projektiver Ebenen definierte taktische Zerlegungen

Es sei $\mathfrak{E}$ eine endliche nichtausgeartete projektive Ebene der Ordnung n und $\mathfrak{E}'$ eine nichtausgeartete projektive Teilebene von $\mathfrak{E}$. Die Teilebene $\mathfrak{E}'$ ist dann ebenfalls endlich; ihre Ordnung bezeichnen wir mit m . Für diese

Situation gibt es viele Beispiele: Jede Ebene $\mathfrak{E}$ über einem Galois-Feld der Ordnung p^r , wo $r > 1$, besitzt eigentliche Teilebenen der Ordnung p^d , mit $d|r$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(I) *Jeder Punkt von $\mathfrak{E}$ ist mit einer Geraden von $\mathfrak{E}$ inzident.*

Wir definieren eine taktische Zerlegung Γ von $\mathfrak{E}$ folgendermaßen: $\mathfrak{P} = \{\text{Punkte von } \mathfrak{E}\}$, $\mathfrak{Q} = \{\text{alle übrigen Punkte}\}$, $\mathfrak{g} = \{\text{Geraden von } \mathfrak{E}\}$, $\mathfrak{h} = \{\text{alle übrigen Geraden}\}$. Es ist klar, daß die so definierte Klasseneinteilung eine taktische Zerlegung ist; die Werte der Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$ sind in nachstehendem Schema zusammengestellt:

$(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$
$\mathfrak{P}$	$m+1$	1	$\mathfrak{g}$	$m+1$	1
$\mathfrak{Q}$	$n-m$	n	$\mathfrak{h}$	$n-m$	n

Daß z.B. $(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) = 1$ ist, folgt so: $(\mathfrak{P}\mathfrak{h})$ ist > 0 nach Voraussetzung (I), und wäre $(\mathfrak{P}\mathfrak{h}) > 1$, so wäre jede $\mathfrak{h}$ -Gerade Verbindungsgerade von Punkten von $\mathfrak{E}'$, gehörte also selbst zu $\mathfrak{E}'$, entgegen unserer Annahme.

Aus den Grundgleichungen folgt nun der bekannte Satz (vgl. BAER [2], theorem 5), daß $m^2 = n$ sein muß: $|\mathfrak{P}|$ ist die Anzahl der Punkte der projektiven Ebene $\mathfrak{E}'$, also gleich $m^2 + m + 1$. Andererseits ist nach (G 4a) auch

$$|\mathfrak{P}| = \sum_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{P}\mathfrak{x})(\mathfrak{x}\mathfrak{Q}) = m+1+n,$$

also folgt $m^2 = n$. Umgekehrt hat jede Teilebene der Ordnung m mit $m^2 = n$ die Eigenschaft (I). Die abgeleitete Struktur $\mathfrak{E}/\Gamma$ ist vom zweiten der in Fig. 4 dargestellten Typen.

(II) *Es gibt Punkte von $\mathfrak{E}$, die auf keiner Geraden von $\mathfrak{E}'$ liegen.*

Wir definieren wieder eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$: Die Punktklassen sind $\mathfrak{P} = \{\text{Punkte von } \mathfrak{E}\}$, $\mathfrak{Q} = \{\text{Punkte, die nicht zu } \mathfrak{E}' \text{ gehören, aber auf Geraden von } \mathfrak{E}' \text{ liegen}\}$, $\mathfrak{R} = \{\text{alle übrigen Punkte}\}$, und die Geradenklassen dual: $\mathfrak{g} = \{\text{Geraden von } \mathfrak{E}'\}$, $\mathfrak{h} = \{\text{Geraden, die nicht zu } \mathfrak{E}' \text{ gehören, aber durch Punkte von } \mathfrak{E}' \text{ gehen}\}$, $\mathfrak{f} = \{\text{alle übrigen Geraden}\}$. Wieder ist klar, daß so eine taktische Zerlegung definiert wird; die Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$ sind in nachstehendem Schema zusammengestellt:

$(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{f}$	$(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{R}$
$\mathfrak{P}$	$m+1$	1	0	$\mathfrak{g}$	$m+1$	1	0
$\mathfrak{Q}$	$n-m$	m^2	m^2+m+1	$\mathfrak{h}$	$n-m$	m^2	m^2+m+1
$\mathfrak{R}$	0	$n-m^2$	$n-m^2-m$	$\mathfrak{f}$	0	$n-m^2$	$n-m^2-m$

Da $(\mathfrak{R}\mathfrak{f}) \geq 0$ sein muß, folgt $m^2 + m \leq n$. Diese Tatsache ist auf anderem Wege auch von BRUCK gefunden worden (vgl. [3], Lemma 3.4). Die von BRUCK angegebene Formel $(n-m)(n-m^2)$ für die Anzahl der mit keiner

Geraden von $\mathfrak{G}'$ inzidenten Punkte von $\mathfrak{G}$ folgt hier unmittelbar durch Anwendung von (G 4a):

$$|\mathfrak{R}| = \sum_x (\mathfrak{R} x) (x \mathfrak{Q}) = (n - m) (n - m^2).$$

Fig. 5 zeigt die beiden möglichen Typen von abgeleiteten Strukturen $\mathfrak{G}/\Gamma$ im Falle (II). Die Existenz von abgeleiteten Strukturen des Typs der Fig. 5a ist gesichert, denn es gibt projektive Ebenen mit Teilebenen, für die (II) gilt und $m^2 + m < n$ ist. Wir haben also ein Beispiel einer abgeleiteten Struktur, in der die Zahlen $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]$, $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$, $[\mathfrak{X}]$, $[\mathfrak{x}]$ nicht alle gleich sind (vgl. S. 69). Da man keine projektiven Ebenen kennt, deren Ordnung eine Zahl des Typs $m(m+1)$ ist, bleibt die Frage offen, ob eine solche Ebene Teilebenen der

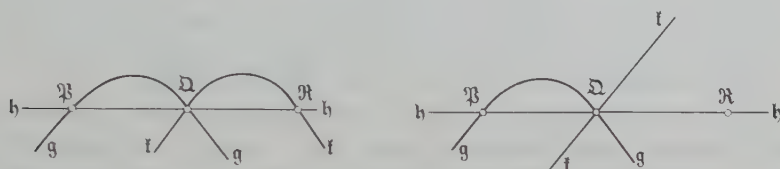


Fig. 5 a u. b

Ordnung m besitzen kann. Die Frage der Existenz von abgeleiteten Strukturen des Typs der Fig. 5b ist also auf diese Weise nicht zu entscheiden. Man sieht aber leicht, daß die abgeleitete Struktur der folgendermaßen definierten taktischen Zerlegung einer endlichen projektiven Ebene vom Typ der Fig. 5b ist:

- Punktklassen: $\mathfrak{R} = \{\text{ein fester Punkt } R\}$,
 $\mathfrak{P} = \{\text{alle Punkte einer festen Geraden } g, \text{ die nicht durch } R \text{ geht}\}$,
 $\mathfrak{Q} = \{\text{alle übrigen Punkte}\}$.
- Geradenklassen: $g = \{g\}$,
 $\mathfrak{h} = \{\text{alle Geraden durch } R\}$,
 $\mathfrak{f} = \{\text{alle übrigen Geraden}\}$.

2.5. Durch Ovale definierte taktische Zerlegungen

Wir wenden uns nun einer anderen Klasse von Beispielen zu. Ein *Oval* einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung n ist eine Menge von $n+1$ Punkten der Ebene, von denen keine drei kollinear sind. Von den $n+1$ Geraden durch einen beliebigen Ovalpunkt müssen also n noch einen weiteren Punkt des Ovals enthalten, jede solche Gerade heißt eine *Sekante*. Es folgt, daß durch jeden Ovalpunkt genau eine Gerade geht, die außer diesem keine weiteren Ovalpunkte enthält, jede solche Gerade heißt eine *Tangente*. Die Anzahl der Tangenten ist $n+1$, die der Sekanten gleich $n(n+1)/2$, also bleiben noch $n(n-1)/2$ weitere Geraden, diese enthalten keine Ovalpunkte und werden *Passanten* genannt.

Wir wollen die Ovale zur Definition gewisser taktischer Zerlegungen heranziehen. Dabei unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

(I') n ist gerade.

In diesem Falle hat QVIST in [12], theorem 5, S. 10, gezeigt, daß alle Tangenten eines Ovals durch einen Punkt gehen müssen. Dieser Punkt bildet zusammen mit den $n+1$ Ovalpunkten eine Menge $\mathfrak{P}$ von $n+2$ Punkten, von denen keine drei kollinear sind. (Man sagt statt dessen auch: die Punkte von $\mathfrak{P}$ befinden sich „in allgemeiner Lage“.) QVIST [12] zeigt weiter, daß es $n+2$ Punkte in allgemeiner Lage in einer projektiven Ebene der Ordnung n höchstens dann geben kann, wenn n gerade ist. Daß es tatsächlich Ebenen gerader Ordnung n mit $n+2$ Punkten in allgemeiner Lage gibt, zeigt folgendes

Beispiel. Es sei $\mathfrak{E}$ eine desarguessche Ebene gerader Ordnung n , d.h. eine Ebene über einem Galois-Feld der Charakteristik 2. Sodann befinden sich die $n+2$ Punkte $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(x:x^2:1)$ in allgemeiner Lage.

Denn da die Abbildung $x \rightarrow x^2$ in jedem endlichen Körper der Charakteristik 2 ein Automorphismus ist, haben zwei verschiedene Punkte $(x:x^2:1)$, $(y:y^2:1)$ verschiedene erste und verschiedene zweite Koordinaten, sind also weder mit $(1:0:0)$ noch mit $(0:1:0)$ kollinear. Und wären drei Punkte $(x:x^2:1)$, $(y:y^2:1)$, $(z:z^2:1)$ mit $x \neq y \neq z \neq x$ kollinear, so würde für den Koeffizienten m der Gleichung $m x_1 + x_2 + b x_3 = 0$ ihrer Verbindungsgeraden folgen:

$$m = (y^2 - x^2)(y - x)^{-1} = (z^2 - x^2)(z - x)^{-1},$$

d.h. $y = z$, ein Widerspruch.

Es sei nun $\mathfrak{E}$ eine projektive Ebene gerader Ordnung und $\mathfrak{P}$ eine Menge von $n+2$ Punkten in allgemeiner Lage von $\mathfrak{E}$. Weiter sei $\mathfrak{Q}$ die Menge der n^2-1 nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Punkte, $\mathfrak{g}$ die Menge der Verbindungsgeraden von $\mathfrak{P}$ -Punkten und $\mathfrak{h}$ die Menge der nicht zu $\mathfrak{g}$ gehörigen Geraden. Sodann bilden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$, mit folgenden Werten für die $(\mathfrak{X} \mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Y} \mathfrak{X})$:

$(\mathfrak{X} \mathfrak{Y})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$(\mathfrak{Y} \mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$
$\mathfrak{P}$	2	0	$\mathfrak{g}$	$n+1$	$(n+2)/2$
$\mathfrak{g}$	$n-1$	$n+1$	$\mathfrak{h}$	0	$n/2$

Wir verifizieren nur, daß $(\mathfrak{g} \mathfrak{Q}) = (n+2)/2$ ist. [Daraus folgt sofort $(\mathfrak{h} \mathfrak{Q}) = n/2$, und die übrigen Beweise sind ganz einfach.] Wir müssen zeigen, daß durch jeden nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Punkt Q genau $(n+2)/2$ Verbindungsgeraden von $\mathfrak{P}$ -Punkten gehen, und dazu genügt der Nachweis, daß auf jeder Verbindungsgeraden von Q mit einem Punkt $P \in \mathfrak{P}$ noch ein weiterer Punkt $P' \neq P$ von $\mathfrak{P}$ liegt. Das aber ist klar: andernfalls blieben für die $n+1$ von P verschiedenen Punkte von $\mathfrak{P}$ nur n Geraden durch P , auf denen sie liegen müßten. Nach dem Schubfachschluß würde folgen, daß es eine Gerade durch P mit zwei von P verschiedenen Punkten von $\mathfrak{P}$ geben müßte. Das aber widerspricht der Annahme, daß die Punkte von $\mathfrak{P}$ sich in allgemeiner Lage befinden.

Die nach der oben erklärten taktischen Zerlegung Γ abgeleitete Struktur $\mathfrak{G}/\Gamma$ ist, da $(\mathfrak{P}\mathfrak{h})=0$, vom Typ der Fig. 4a, sie besitzt aber im allgemeinen keine Klassen mit nur einem Element; vielmehr ist $|\mathfrak{P}|=n+2$, $|\mathfrak{Q}|=n^2-1$, $|\mathfrak{g}|=(n+1)(n+2)/2$, $|\mathfrak{h}|=n(n-1)/2$. Diese Zahlen sind bei $n \geq 4$ alle größer als 1. Also kann es bei $n \geq 4$ auch keine Klasse mit n^2 Elementen geben.

(II') n ist ungerade.

Für diesen Fall hat Qvisr gezeigt ([12], theorem 3, S. 8), daß durch einen Schnittpunkt zweier Tangenten eines Ovals keine weiteren Tangenten mehr gehen können. Die Menge der Punkte von $\mathfrak{G}$ zerfällt also in drei Klassen: Die Klasse $\mathfrak{P}$ der Ovalpunkte, die Klasse $\mathfrak{Q}$ der *äußeren Punkte*, das sind die Tangentenschnittpunkte, und die Klasse $\mathfrak{H}$ aller übrigen Punkte; diese heißen *innere Punkte*, durch sie geht keine Tangente. Nennen wir nun die Klasse der Tangenten $\mathfrak{g}$, die der Sekanten $\mathfrak{h}$, und die der Passanten $\mathfrak{k}$, so bilden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ eine taktische Zerlegung mit folgenden Zahlen $(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$:

$(\mathfrak{X}\mathfrak{x})$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{k}$	$(\mathfrak{x}\mathfrak{X})$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{H}$
$\mathfrak{P}$	1	2	0	$\mathfrak{g}$	1	2	0
$\mathfrak{Q}$	n	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$	$\mathfrak{h}$	n	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$
$\mathfrak{H}$	0	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$	$\mathfrak{k}$	n	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$

Die abgeleitete Struktur ist wieder vom Typ der Fig. 5a. Wir haben also hier noch ein Beispiel dafür, daß die abgeleiteten Strukturen ganz verschiedener Typen von taktischen Zerlegungen dieselben sein können.

3. Die Matrizen einer taktischen Zerlegung

3.1. Die Matrix-Grundgleichungen

Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige λ -Ebene der Ordnung n und Γ eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{G}$. Wir numerieren die Γ -Klassen in willkürlicher Weise von 1 bis $t=t(\Gamma)$: $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_t$ seien die Punktklassen und $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_t$ die Geradenklassen. Um dauernde Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir in diesem Abschnitt stets voraussetzen, daß $t > 1$ ist. Wir definieren vier Matrizen P, G, A, B folgendermaßen (i ist der Zeilen-, k der Spaltenindex, und δ_{ik} das Kronecker-Symbol):

$$P = (|\mathfrak{P}_i| \delta_{ik}), \quad G = (|\mathfrak{g}_i| \delta_{ik}).$$

$$A = (|\mathfrak{P}_i \mathfrak{g}_k|), \quad B = (|\mathfrak{g}_i \mathfrak{P}_k|).$$

Diese Matrizen nennen wir die Γ -Matrizen; sie sind sämtlich t -reihige quadratische Matrizen. Beispiele für Γ -Matrizen A, B sind im zweiten Abschnitt schon aufgetreten (vgl. S. 75, 76, 76, 78, 79). Wir merken an, daß im Falle $t=v$, d.h. wenn jede Γ -Klasse aus einem Element besteht, die Matrix A gerade die bekannte Inzidenzmatrix von $\mathfrak{G}$ und B ihre Transponierte A^T ist.

Wir werden in diesem Paragraphen Beziehungen herleiten, die zwischen den Γ -Matrizen jeder taktischen Zerlegung Γ bestehen müssen, nämlich die folgenden

Matrix-Grundgleichungen

$$(M\ 1) \quad GA^T = BP, \quad PB^T = AG,$$

$$(M\ 2) \quad AB = \lambda PJ + nE, \quad BA = \lambda GJ + nE.$$

Hier bedeutet E die t -reihige Einheitsmatrix und J diejenige t -reihige quadratische Matrix, deren sämtliche Elemente gleich Eins sind.

$$(M\ 3) \quad AGA^T = \lambda PJ P + nP, \quad B P B^T = \lambda G J G + nG.$$

Die Beweise ergeben sich sofort aus den Grundgleichungen (G 1) und (G 4): Die Beziehung (G 1) besagt $(\mathfrak{P}_i g_k) | g_k | = (g_k \mathfrak{P}_i) | \mathfrak{P}_i |$ für alle i, k . In Matrixform geschrieben heißt das gerade $AG = (BP)^T$, und die Beziehungen (M 1) folgen nun sofort aus der Tatsache, daß P und G Diagonalmatrizen, also gleich ihren Transponierten sind. Die Gln. (M 2) ergeben sich ebenso direkt aus (G 4a) und (G 4b). Die Beziehungen (M 3) schließlich folgen aus (M 1) durch Linksmultiplikation mit A bzw. B und Benutzung von (M 2).

Matrizen mit ganzzahligen Elementen können auch als Matrizen über beliebigen Körpern aufgefaßt werden. Wir zeigen:

Lemma 7. *Ist Γ eine taktische Zerlegung einer λ -Ebene der Ordnung n , so sind die Γ -Matrizen A und B über allen Körpern regulär, deren Charakteristik kein Teiler von $n(n + \lambda)$ ist.*

Um das zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß das Produkt der Determinanten von A und B über solchen Körpern von Null verschieden ist. Nun ist aber

$$(11) \quad \det A \det B = n^{t-1} (n + \lambda)^2,$$

was man z.B. aus (M 2) herleiten kann: Man subtrahiere die letzte Spalte der Matrix AB von allen anderen und addiere sodann die $t - 1$ ersten Zeilen zur letzten. Es ergibt sich eine Dreiecksmatrix mit $t - 1$ Diagonalstellen n und der letzten Diagonalstelle $n + \lambda \sum_{i=1}^t |\mathfrak{P}_i|$; dieser Ausdruck ist wegen (G 3) und (3) gleich $(n + \lambda)^2$. Also folgt (11), und das Lemma 7 ist bewiesen.

Wir merken an, daß A und B also insbesondere über dem Körper der rationalen Zahlen regulär sind.

3.2. Zahlentheoretische Eigenschaften der $|\mathfrak{X}|, |\mathfrak{x}|$

In diesem Paragraphen ziehen wir einige erste elementare Folgerungen aus den Matrixgrundgleichungen. Wir definieren zunächst D als den größten gemeinsamen Teiler aller $|\mathfrak{X}|$, d als den g.g.T. aller $|\mathfrak{x}|$, wobei wie immer $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ die Klassen einer taktischen Zerlegung sind.

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{E}$ eine λ -Ebene der Ordnung n und Γ eine taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$. Sodann gilt:*

(a) *Ist p eine Primzahl, die weder n noch $k = n + \lambda$ teilt, so geht p in ebensovielen $|\mathfrak{X}|$ wie $|\mathfrak{x}|$ auf. Insbesondere gilt $p | D$ genau dann, wenn $p | d$ gilt, und in diesem Falle geht p in D und d gleich oft auf.*

(b) Sind v und k teilerfremd, so ist $D = d$.

(c) Gibt es eine Primzahl p , die eine der Zahlen D , d teilt und deren Quadrat nicht in n aufgeht, so teilt sie auch die andere.

(d) Die Zahl $n^{t-1} \prod_{\mathfrak{x}} |\mathfrak{X}| \prod_{\mathfrak{z}} |\mathfrak{z}|$ ist stets eine Quadratzahl.

Beweis. Über jedem Körper, über dem A und B reguläre Matrizen sind, haben P und $\lambda G J G + nG = B A G$ sowie G und $\lambda P J P + nP = A B P$ wegen (M3) gleiche Ränge. Das sind nach Lemma 7 gerade die Körper, deren Charakteristik Null oder eine Primzahl ist, die weder n noch k teilt. AB und BA sind über jedem solchen Körper regulär, also folgt Gleichheit der Ränge von P und G . Da P und G Diagonalmatrizen sind, besagt die Gleichheit ihrer Ränge Gleichheit der Anzahlen von Null verschiedener ihrer Elemente. Ist also p eine weder n noch k teilende Primzahl, so folgt: Es gibt ebensoviele $|\mathfrak{X}| \not\equiv 0 \pmod{p}$ wie $|\mathfrak{z}| \not\equiv 0 \pmod{p}$. Also geht p in ebensoviele $|\mathfrak{X}|$ wie $|\mathfrak{z}|$ auf, und insbesondere geht p genau dann in allen $|\mathfrak{X}|$ auf, wenn p in allen $|\mathfrak{z}|$ aufgeht. Ist das der Fall, und ist p^r die größte in allen $|\mathfrak{X}|$ und in allen $|\mathfrak{z}|$ aufgehende Potenz von p , so sind die Zahlen $p^{-r}|\mathfrak{X}|$, $p^{-r}|\mathfrak{z}|$ alle noch ganz. Also sind die Matrizen $p^{-r}P$ und $p^{-r}G$ ebenso wie P und G ganzzahlig. Es folgt nun wie oben, daß $p^{-r}P$ und $p^{-r}G$ die gleichen Ränge haben. Wegen der Maximaleigenschaft von r gibt es unter den Zahlen $p^{-r}|\mathfrak{X}|$, $p^{-r}|\mathfrak{z}|$ mindestens eine, die nicht durch p teilbar ist, d.h. mindestens eine der Matrizen $p^{-r}P$, $p^{-r}G$ hat von Null verschiedenen Rang. Dann müssen sie aber beide von Null verschiedenen Rang haben, d.h. es gibt sowohl ein $p^{-r}|\mathfrak{X}| \not\equiv 0 \pmod{p}$ als auch ein $p^{-r}|\mathfrak{z}| \not\equiv 0 \pmod{p}$. Also ist genau dann $p^r|D$, wenn $p^r|d$ gilt. Damit ist (a) bewiesen.

Nach (G3) sind sowohl D als auch d Teiler von v . Andererseits folgt aus (4), daß d ein Teiler aller $k|\mathfrak{X}|$, also ein Teiler von kD ist; dual dazu ist D ein Teiler von kd . Sind nun v und k teilerfremd, so folgt, daß D und d einander teilen, also gleich sind. Damit ist (b) bewiesen.

Sei p eine Primzahl, die d teilt, deren Quadrat aber kein Teiler von n ist. Wäre p kein Teiler von D , so gäbe es eine Punktklasse $\mathfrak{P}$ mit $p \nmid |\mathfrak{P}|$; wegen (4) müßte dann $p|k$ folgen. Daraus und aus der oben bewiesenen Beziehung $d|v$ würde mit (2) weiter $p|\lambda$ und daraus $p^2|(k^2 - \lambda v)$ folgen; das aber ist ein Widerspruch gegen (3), wonach $k^2 - \lambda v = n$ ist. Damit ist (c) bewiesen.

Aus (M1) erhält man durch Multiplikation mit BP und Determinantenbildung unter Berücksichtigung von (11) die Gleichung $n^{t-1}k^2 \det PG = (\det BP)^2$. Daraus folgt wegen

$$\det PG = \prod_{\mathfrak{x}} |\mathfrak{X}| \prod_{\mathfrak{z}} |\mathfrak{z}|$$

sofort die Behauptung (d), und damit ist Satz 9 vollständig bewiesen.

Wir bemerken noch, daß die Voraussetzung von (b) im Falle $\lambda = 1$ der projektiven Ebenen immer erfüllt ist. Für jede taktische Zerlegung einer endlichen projektiven Ebene ist also der g.g.T. aller $|\mathfrak{X}|$ gleich dem aller $|\mathfrak{z}|$. Ferner bemerken wir, daß aus (d) der bekannte Satz folgt (vgl. etwa HALL [7],

S. 66), daß die Ordnung einer λ -Ebene mit geradem v ein Quadrat sein muß; dazu betrachte man einfach die triviale Zerlegung mit $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{x}| = \text{const} = 1$. Nennt man weiter eine taktische Zerlegung Γ *symmetrisch*, wenn es eine Numerierung der Γ -Klassen derart gibt, daß $|\mathfrak{P}_i| = |\mathfrak{g}_i|$ ist für alle i (man vergleiche die Beispiele von S. 76, 76, 79), so folgt aus (d), daß die Zahl n^{t-1} bei symmetrischen Zerlegungen ein Quadrat sein muß. Insbesondere gilt also, in Verallgemeinerung des erwähnten Satzes:

Folgerung. Besitzt eine λ -Ebene eine symmetrische taktische Zerlegung Γ mit geradzahligem $t(\Gamma)$, so ist ihre Ordnung n ein Quadrat.

Die Aussagen des Satzes 9 werden besonders für den Fall interessant, daß alle $|\mathfrak{X}|$ und alle $|\mathfrak{x}|$ Potenzen derselben Primzahl p sind; eine solche taktische Zerlegung wollen wir eine p -Zerlegung nennen. Dieser Fall tritt z.B. dann ein, wenn die Zerlegung gemäß Satz 1 von einer p -Gruppe von Kollineationen herrührt: Wegen der Beziehung (6) von S. 65 müssen alle $|\mathfrak{X}|$ und alle $|\mathfrak{x}|$ Teiler der Gruppenordnung sein. Ein $|\mathfrak{X}|$ bzw. $|\mathfrak{x}|$, welches nicht durch p teilbar ist, muß also im Falle der p -Zerlegung gleich Eins sein. Bezeichnen wir mit F bzw. f die Anzahlen der $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{X}| = 1$ bzw. $|\mathfrak{x}| = 1$ (für den Fall, daß die Zerlegung von einer p -Gruppe von Kollineationen herrührt, sind F und f die Anzahlen von Fixpunkten bzw. Fixgeraden der Gruppe), so gilt für jede p -Zerlegung

$$(12) \quad F \equiv f \equiv v \pmod{p},$$

wie man sofort aus (G3) folgert. Aus Satz 9 und der Kongruenz (12) erhält man nun weiter:

Satz 10. Ist Γ eine p -Zerlegung einer λ -Ebene der Ordnung n , so gilt:

(a') *Sind v und k teilerfremd, so ist genau dann $F = 0$, wenn $f = 0$ ist.*

(b') *Teilt p weder n noch k , oder ist $t(\Gamma) \leq p$, so ist $F = f$.*

(c') *Ist $\lambda = 1$ und $F \neq f$, so ist p ein Teiler von n .*

Beweis. Sind v und k teilerfremd, so ist nach Satz 9 (b) der g.g.T. aller $|\mathfrak{X}|$ gleich dem aller $|\mathfrak{x}|$. In einer p -Zerlegung ist ein solcher g.g.T. genau dann gleich Eins, wenn es wirklich eine Klasse mit nur einem Element gibt. Also folgt (a'). Daß $F = f$ ist, wenn $p \nmid kn$, folgt aus Satz 9 (a). Sei nun $t(\Gamma) \leq p$. Nach (12) gilt sodann $F = f + jp$, o. B. d. A. kann $j \geq 0$ angenommen werden. Da $F \leq t(\Gamma)$ ist, folgt weiter $f + jp \leq p$, also ist entweder $j = 0$, in welchem Falle $F = f$, also nichts zu beweisen ist, oder $j = 1$, $f = 0$. Dieser letztere Fall kann aber nicht eintreten, denn dann würde $F = p = t$ folgen, was bedeuten würde, daß jede Punktklasse nur ein Element enthält. Das ist wegen Satz 2 mit $f = 0$ unverträglich.

Es bleibt (c') zu beweisen. Man überlegt sich leicht, daß im Falle $\lambda = 1$, also dem der projektiven Ebene, diejenigen Punkte und Geraden, welche Γ -Klassen für sich allein bilden, eine eventuell ausgeartete Teilebene bilden. Ist nun $F \neq f$, so muß diese Teilebene mindestens ein Element enthalten, ja nach (a') sogar mindestens einen Punkt und mindestens eine Gerade. [$k = n + 1$ und $v = n(n + 1) + 1$ sind nämlich teilerfremd.] Ferner ist diese Teilebene

ausgeartet, und es gibt in ihr eine ausgezeichnete Gerade g , die mit allen Punkten, und einen ausgezeichneten Punkt P , der mit allen Geraden der Teilebene inzident ist. Die aus der ausgezeichneten Geraden g allein bestehende Klasse nennen wir g . Offenbar ist $|g| = 1$, also folgt aus (G 1) für alle $\mathfrak{X}$ mit $(\mathfrak{X}g) \neq 0$, daß $(\mathfrak{X}g) = |\mathfrak{X}|$ ist. Da aber für alle $\mathfrak{X}$ entweder $|\mathfrak{X}| = 1$ oder $|\mathfrak{X}| \equiv 0 \pmod{p}$ gilt, ergibt sich aus (G 2) die Kongruenz $F \equiv k = n + 1 \pmod{p}$. Wegen (12) ist aber auch $F \equiv v = n(n+1) + 1 \pmod{p}$. Subtraktion dieser beiden Kongruenzen ergibt $n^2 \equiv 0 \pmod{p}$, also ist $p|n$, q.e.d.

3.3. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von taktischen Zerlegungen

Aus der Matrix-Grundgleichung (M 3), die schon beim Beweis von Satz 9 wesentlich benutzt wurde, lassen sich noch sehr viel weitergehende Folgerungen ziehen. Betrachtet man nämlich z.B. die (symmetrischen) Matrizen G und $ABP = \lambda PJP + nP$ als Koeffizientenmatrizen zweier quadratischer Formen $g(x) = x^T G x$ und $h(y) = y^T A B P y$, wobei x und y unbestimmte t -stellige Spaltenvektoren sind, so folgt aus (M 3), daß die Substitution $x = A y$ die Formen g und h ineinander überführt. Man nennt solche Formen und auch die zugehörigen Matrizen *kongruent*, wenn die Substitutionsmatrix A regulär ist. Die Beziehungen (M 3) liefern also wegen Lemma 7 die Kongruenz von G mit $\lambda PJP + nP$ und die Kongruenz von P mit $\lambda G J G + nG$ über dem Körper der rationalen Zahlen. MINKOWSKI und HASSE haben nun notwendige (und hinreichende, diese letztere Tatsache interessiert uns hier aber nicht) Bedingungen für die rationale Kongruenz von Matrizen aufgestellt. Diese Bedingungen können wir auf unseren Fall anwenden. Der Formulierung des (recht komplizierten) Ergebnisses dieser Anwendung der Hasse-Minkowskischen Theorie auf (M 3) müssen wir einige Definitionen vorausschicken.

Es sei p eine ungerade Primzahl und a und b zwei beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen. Sodann ist $a = a' p^\alpha$, $b = b' p^\beta$ für gewisse a' , $b' \not\equiv 0 \pmod{p}$ und $\alpha, \beta \geq 0$. Wir definieren das *p-Hilbert-Symbol* $(a, b)_p$ von a und b durch

$$(a, b)_p = (-1|p)^{\alpha\beta} (a'|p)^\beta (b'|p)^\alpha;$$

hier bedeuten $(-1|p)$, $(a'|p)$, $(b'|p)$ Legendresche quadratische Restsymbole. (Für andere Möglichkeiten der Definition des Hilbert-Symbolen sowie für die Beweise der unten angegebenen Rechenregeln für Hilbert-Symbole vergleiche man etwa JONES [11], Chapter 2.) Das Hilbert-Symbol hat die folgenden Eigenschaften:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a, b)_p = (b, a)_p \\ (ar^2, bs^2)_p = (a, b)_p \\ (a, bc)_p = (a, b)_p (a, c)_p \\ (ar, br)_p = (a, b)_p (r, -ab)_p \\ (a, a-1)_p = (a, a)_p = (a, -1)_p \\ (a, 1)_p = 1. \end{array} \right.$$

Wir führen noch folgende für das weitere bequeme Abkürzungen ein:

$$(14) \quad \gamma_i = n + \lambda \sum_{j=1}^i |\mathfrak{g}_j|, \quad \pi_i = n + \lambda \sum_{j=1}^i |\mathfrak{P}_j| \quad (i = 1, \dots, t)$$

und bemerken, daß $\gamma_t = \pi_t = n + \lambda v = k^2 = (n + \lambda)^2$. Das angekündigte Hauptresultat lautet nun:

Satz 11. Die Punktklassen $\mathfrak{P}_i$ und die Geradenklassen $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, \dots, t > 1$) einer taktischen Zerlegung einer λ -Ebene der Ordnung n genügen den folgenden Beziehungen:

$$(H) \quad \left\{ \begin{aligned} & (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2})_p \prod_{i=1}^{t-1} \left(\prod_{j=1}^i |\mathfrak{P}_j|, |\mathfrak{P}_{i+1}| \right)_p \left(\prod_{j=1}^i |\mathfrak{g}_j|, |\mathfrak{g}_{i+1}| \right)_p \\ & = (n, \gamma_1 \prod_{i=1}^{t-1} |\mathfrak{g}_{i+1}|^t)_p \prod_{i=1}^{t-1} (\gamma_i, -|\mathfrak{g}_i| |\mathfrak{g}_{i+1}| \gamma_{i+1})_p \\ & = (n, \pi_1 \prod_{i=1}^{t-1} |\mathfrak{P}_{i+1}|^t)_p \prod_{i=1}^{t-1} (\pi_i, -|\mathfrak{P}_i| |\mathfrak{P}_{i+1}| \pi_{i+1})_p \end{aligned} \right. \quad \bullet$$

für jede ungerade Primzahl p .

Beweis. Der oben erwähnte Hasse-Minkowskische Satz lautet in der für unsere Zwecke bequemsten Formulierung:

Gibt es zu zwei t -reihigen ganzzahligen symmetrischen Matrizen R und S eine ganzzahlige reguläre Matrix C derart, daß $CRC^T = S$ ist, so gilt für jede ungerade Primzahl p :

$$\prod_{i=1}^{t-1} (R_i, -R_{i+1})_p = \prod_{i=1}^{t-1} (S_i, -S_{i+1})_p;$$

hierbei bedeuten R_i und S_i die i -ten Hauptminoren von R bzw. S .

(Zum Beweis vergleiche man HASSE [9] oder auch JONES [11], Chapter 2.) Dieser Satz ist wegen (M3) und Lemma 7 auf die Matrizen P und $\lambda G J G + nG$ bzw. G und $\lambda P J P + nP$ anwendbar. Wie haben die Hauptminoren dieser Matrizen zu berechnen. Es ist klar, daß $P_i = \prod_{j=1}^i |\mathfrak{P}_j|$, $G_i = \prod_{j=1}^i |\mathfrak{g}_j|$ ist, denn P und G sind Diagonalmatrizen. Weiter ist

$$(\lambda P J P + nP)_i = (\lambda P J + nE)_i P_i = (AB)_i P_i$$

wegen (M2); und analog folgt $(\lambda G J G + nG)_i = (BA)_i G_i$. Auf dieselbe Art wie im Beweis von Lemma 7 für $\det AB$ kann man weiter zeigen, daß

$$(AB)_i = n^{i-1} \left(n + \lambda \sum_{j=1}^i |\mathfrak{P}_j| \right) = \pi_i n^{i-1}$$

und $(BA)_i = \gamma_i n^{i-1}$ ist. Der Hassesche Satz gibt also die Beziehung:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \prod_{i=1}^{t-1} (P_i, -P_{i+1}) = \prod_{i=1}^{t-1} (n^{i-1} \gamma_i G_i, n^i \gamma_{i+1} G_{i+1}) \\ & \prod_{i=1}^{t-1} (G_i, -G_{i+1}) = \prod_{i=1}^{t-1} (n^{i-1} \pi_i P_i, n^i \pi_{i+1} P_{i+1}). \end{aligned} \right.$$

Dabei haben wir den Index p der Hilbert-Symbole weggelassen, was nicht zu Mißverständnissen führen wird. Die rechte Seite der ersten Gl. (15) läßt sich unter Benutzung der Rechenregeln (13) für Hilbert-Symbole in folgende drei Produkte aufspalten:

$$\prod_{i=1}^{t-1} (n^{i-1} \gamma_i, n^i \gamma_{i+1}) \prod_{i=1}^{t-1} (n^{i-1} \gamma_i, G_{i+1}) (G_i, n^i \gamma_{i+1}) \prod_{i=1}^{t-1} (G_i, -G_{i+1}).$$

Das erste dieser Produkte wird weiter zerlegt in

$$\begin{aligned} & \left[\prod_{i=1}^{t-1} (n^{i-1}, -n^i) \right] (n, \gamma_1) \left[\prod_{i=1}^{t-1} (\gamma_i, n^{2(i-1)}) \right] (n^{t-2}, \gamma_t) \prod_{i=1}^{t-1} (\gamma_i, -\gamma_{i-1}) \\ & = (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2} \gamma_1) \prod_{i=1}^{t-1} (\gamma_i, -\gamma_{i-1}). \end{aligned}$$

Das zweite Produkt wird gleich

$$\begin{aligned} & (G_1, n \gamma_2) \left[\prod_{i=2}^{t-1} (G_i, n^i \gamma_{i+1} n^{i-2} \gamma_{i-1}) \right] (n^{t-2} \gamma_{t-1}, G_t) \\ & = (n, |g_1| G_t) (|g_1|, \gamma_2) (\gamma_{t-1}, G_t) \prod_{i=2}^{t-1} \left(\prod_{j=1}^i |g_j|, \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \right) \\ & = (n, |g_1| G_t) (|g_1|, \gamma_1) (\gamma_{t-1}, |g_1| G_t) \prod_{j=2}^{t-1} \left(|g_j|, \prod_{i=j}^{t-1} \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \right) \\ & = (n, |g_1| G_t) \prod_{i=1}^{t-1} (\gamma_i, |g_i| |g_{i+1}|). \end{aligned}$$

Genau so läßt sich die zweite Gl. (15) behandeln, es folgt also:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \prod_{i=1}^{t-1} (P_i, -P_{i+1}) (G_i, -G_{i+1}) \\ & = (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2} \gamma_1 |g_1| G_t) \prod_{i=1}^{t-1} (\gamma_i, -|g_i| |g_{i+1}| \gamma_{i+1}) \\ & = (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2} \pi_1 |P_1| P_t) \prod_{i=1}^{t-1} (\pi_i, -|P_i| |P_{i+1}| \pi_{i+1}). \end{aligned} \right.$$

Da $P_{i+1} = |P_{i+1}| P_i$ ist, läßt sich auf die Hilbert-Symbole im ersten der Produkte (16) noch einmal die vierte Rechenregel (13) anwenden:

$$(17) \quad \prod_{i=1}^{t-1} (P_i, -P_{i+1}) (G_i, -G_{i+1}) = \prod_{i=1}^{t-1} (P_i, |P_{i+1}|) (G_i, |g_{i+1}|).$$

Aus (16) und (17) folgt die behauptete Beziehung (H) nun ganz einfach.

Wir bemerken noch, daß die Beziehung (H) sich im Falle einer symmetrischen Zerlegung, d.h. wenn $|P_i| = |g_i|$ für alle i , auf folgende einfachere Form reduziert:

$$(H_s) \quad (n, (-1)^{(t-1)(t-2)/2} \gamma_1 \prod_{i=1}^{t-1} |g_{i+1}|^t)_p = \prod_{i=1}^{t-1} (\gamma_i, -|g_i| |g_{i+1}| \gamma_{i+1})_p.$$

Die Gln. (H) sind notwendige Bedingungen für die Existenz einer taktischen Zerlegung mit vorgegebenen $|\mathfrak{P}_i|$ und $|\mathfrak{G}_i|$. Sie enthalten alle bisher bekannten Nichtexistenzsätze für λ -Ebenen. Wir geben hier nur ein Beispiel:

Folgerung (Satz von BRUCK und RYSER [4], theorem 1). Hat eine endliche projektive Ebene die Ordnung $n \equiv 1$ oder $2 \pmod{4}$, so ist jede im quadratfreien Teil von n aufgehende ungerade Primzahl von der Form $4j+1$.

Beweis. Man betrachte die triviale taktische Zerlegung der Ebene in lauter Klassen mit je einem Element. Dann ist $t=v=n^2+n+1$ und $(t-1)(t-2)/2 \equiv -1 \pmod{2}$; ferner gilt, da $\lambda=1$, daß $\gamma_i = n+i$, $i=1, \dots, t$. Da die Zerlegung natürlich symmetrisch ist, ist (H_s) anwendbar. Es ergibt sich:

$$(n, -[n+1])_p = \prod_{i=1}^{t-1} (n+i, -[n+i+1])_p.$$

Mit der dritten und fünften der Rechenregeln (13) folgt weiter:

$$(18) \quad (n, -1)_p (n+1, -1)_p = \prod_{i=1}^{t-1} (n+i, -1)_p (n+i+1, -1)_p.$$

Faßt man nun die rechts stehenden Hilbert-Symbole in geeigneter Weise zusammen und beachtet man noch, daß $n+t=n+v=(n+1)^2$ ist, so bleibt wegen der zweiten und der letzten der Regeln (13) auf der rechten Seite von (18) nur $(n+1, -1)$ übrig. Also folgt $(n, -1)_p = 1$ für alle p . Ist nun p ein Teiler des quadratfreien Teiles von n , so daß $n=n'p^m$ mit $n' \not\equiv 0 \pmod{p}$ und $m \equiv 1 \pmod{2}$ wird, so ergibt sich aus der Definition des Hilbert-Symbols schließlich, daß $(-1|p) = 1$, also p von der Form $4j+1$ ist, q. e. d.

3.4. Vollsymmetrische taktische Zerlegungen

Die Anwendung der Beziehungen (H) ist im allgemeinen recht kompliziert und erfordert viele Fallunterscheidungen. In der folgenden Untersuchung, bei der wir uns an sich auch auf die Beziehungen (H) stützen könnten, schlagen wir daher einen anderen Weg ein.

Eine taktische Zerlegung einer beliebigen λ -Ebene soll *vollsymmetrisch* heißen, wenn alle ihre Klassen gleichviele Elemente enthalten. Vollsymmetrische taktische Zerlegungen werden insbesondere von halbtransitiven (Definition in [15]) Kollineationsgruppen erzeugt, also z. B. von zyklischen Kollineationsgruppen mit Primzahlordnung ohne Fixelemente. Bei der Behandlung der vollsymmetrischen Zerlegungen läßt sich die schwerfällige Behandlung mit (H_s) durch eine andere Methode ersetzen, deren wesentliches Hilfsmittel folgender von CHOWLA und RYSER stammender Satz ist:

Es sei $t > 1$ ungerade und $a, b > 0$ ganze Zahlen. Gibt es sodann eine t -reihige Matrix C derart, daß $CC^T = aJ + bE$ ist, so besitzt die Gleichung

$$bx^2 + (-1)^{(t-1)/2} ay^2 = z^2$$

nichttriviale ganzzahlige Lösungen x, y, z .

Zum Beweis vergleiche man [6], theorems 4, 5.

Wir benutzen dieses Resultat zum Beweis des folgenden Satzes:

Satz 12. *Es sei $\mathfrak{E}$ eine λ -Ebene der Ordnung n und Γ eine vollsymmetrische taktische Zerlegung von $\mathfrak{E}$ mit $t - t(\Gamma) > 1$. Ist sodann t gerade, so ist n eine Quadratzahl. Ist t ungerade und bezeichnet s die Anzahl der Elemente jeder Γ -Klasse, so gilt:*

(i) *Für die ungeraden Primteiler p des quadratfreien Faktors $(\lambda s)^*$ von λs ist $n \equiv 0 \pmod p$ oder $(n|p) = 1$.*

(ii) *Für die ungeraden Primteiler p des quadratfreien Faktors n^* von n ist $\lambda s \equiv 0 \pmod p$ oder $(\lambda s|p) = (-1)^{(t-1)/2} (p-1)^{t/4}$.*

Die jeweils erste Alternative tritt dabei höchstens dann auf, wenn $\lambda > 1$ ist.

Beweis. (a) Daß n für gerades t ein Quadrat sein muß, ist ein Spezialfall der Folgerung von Satz 9. Da alle $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{Y}| = s$, folgt aus (G 1), daß $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{Y}\mathfrak{X})$ für jedes Paar $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ von Γ -Klassen gelten muß. Das bedeutet gerade $B = A^T$. Weiter ist $P = G = sE$, also $PJ = GJ = sJ$. M2) ergibt nun:

$$AA^T = \lambda sJ + nE.$$

Da A über dem Körper der rationalen Zahlen regulär ist, ist der Chowla-Rysersche Satz mit $a = \lambda s$ und $b = n$ anwendbar. Es gibt also ein nichttriviales Tripel x, y, z ganzer Zahlen mit

$$(19) \quad nx^2 + (-1)^{(t-1)/2} \lambda sy^2 = z^2.$$

(b) Es sei nun $\lambda s = s^*r^2$ und s^* quadratfrei. Division von (19) durch das Quadrat des g.g.T. von x, ry, z ergibt eine nichttriviale Gleichung

$$n\xi^2 + (-1)^{(t-1)/2} s^*\eta^2 = \zeta^2,$$

in der ξ, η, ζ teilerfremd sind. Ist nun $p|s^*$, so folgt zunächst $(p, \xi) = 1$, denn aus $p|\xi$ und $p|s^*$ würde $p|\zeta^2$, also $p^2|\zeta^2$ folgen. Außerdem wäre $p^2|\xi^2$, also auch $p^2|s^*\eta^2$. Da s^* quadratfrei ist, würde daraus $p|\eta$ folgen, d.h. ξ, η und ζ hätten den gemeinsamen Teiler p , im Gegensatz zu der Voraussetzung. Es gibt also eine ganze Zahl ϱ mit $\varrho\xi \equiv 1 \pmod p$; Multiplikation unserer Gleichung mit ϱ^2 ergibt

$$(\varrho\xi)^2 = n(\varrho\xi)^2 + (-1)^{(t-1)/2} s^*(\varrho\eta)^2 \equiv n \pmod p,$$

und daraus folgt, daß entweder $n \equiv 0 \pmod p$ oder $(n|p) = 1$ ist.

(c) Aus (19) folgt durch Division mit dem Quadrat des g.g.T. von mx, y, z , wobei $n = n^*m^2$ mit quadratfreiem n^* , eine nichttriviale Beziehung

$$n^*\xi^2 + (-1)^{(t-1)/2} \lambda s\eta^2 = \zeta^2$$

mit teilerfremden ξ, η, ζ . Daraus ergibt sich wie unter (b), daß entweder $\lambda s \equiv 0 \pmod p$ oder $((-1)^{(t-1)/2} \lambda s|p) = 1$ sein muß für jeden ungeraden Primteiler p von n^* ; wegen $(-1|p) = (-1)^{(p-1)/2}$ folgt daraus die Behauptung (ii) von Satz 12. [Die Beweisteile (b) und (c) sind PICKERT [12], S. 297 nachgebildet.]

(d) Es bleibt zu zeigen, daß im Falle $\lambda = 1$ die Zahlen n und $\lambda s = s$ teilerfremd sind. Das aber folgt sofort aus der Teilerfremdheit von $v = n(n+1) + 1$ und n sowie der Tatsache, daß $v = st$. Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen.

Für den Fall, daß Γ die triviale taktische Zerlegung ist, deren sämtliche Klassen aus einem Element bestehen, ist die Aussage (b) von Satz 12 äquivalent zu den von CHOWLA und RYSER bewiesenen notwendigen Kriterien für die Existenz von λ -Ebenen. Satz 12 besagt die Nichtexistenz von vollsymmetrischen taktischen Zerlegungen in vielen endlichen projektiven Ebenen, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist; z. B. kann eine Ebene der Ordnung 10, wenn sie existiert, keine vollsymmetrische Zerlegung besitzen, wie man leicht nachprüft.

Zum Abschluß leiten wir aus Satz 12 einige rein zahlentheoretische Folgerungen her:

Satz 13. *Es sei p eine ungerade Primzahl, $n = p^r$ mit ungeradem r , und $v = n^2 + n + 1$. Sodann gilt für alle ungeraden Primteiler q von v :*

$$(a) \quad (p|q) = 1$$

und für alle echten Teiler d von v :

$$(b) \quad (d|p) = (-1)^{(p-1)(v-d)/4d}.$$

$$(c) \quad \text{Aus } v \equiv -1 \pmod{4} \text{ folgt } (d|p) = (-d|p) = 1.$$

$$(d) \quad \text{Aus } p \equiv 1 \pmod{4} \text{ folgt } (d|p) = 1.$$

$$(e) \quad \text{Aus } (d|p) = -1 \text{ folgt } p \equiv d \equiv -1 \pmod{4}.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{G}$ die Desarguessche projektive Ebene der Ordnung n . Nach einem Satz von SINGER ([14]; für den Beweis vergleiche man auch PICKERT [12], S. 303) ist $\mathfrak{G}$ zyklisch, d.h. es existiert eine auf den Punkten von $\mathfrak{G}$ transitive zyklische Kollineationsgruppe Γ von $\mathfrak{G}$. Da abelsche transitive Permutationsgruppen regulär sind (vgl. WIELANDT [15], S. 9), muß Γ die Ordnung v haben. Es sei σ ein erzeugendes Element von Γ und d ein echter Teiler von v . Sodann erzeugt die von σ^d erzeugte Untergruppe Δ von Γ eine vollsymmetrische taktische Zerlegung von $\mathfrak{G}$ mit $t(\Delta) = d$ und $s = v/d$.

Für jeden echten Primteiler q von v läßt sich nun d so wählen, daß q im quadratfreien Faktor von s aufgeht. Also ist $(n|q) = 1$ nach Satz 12, (i); wegen $\lambda = 1$ kann nämlich nicht $n \equiv 0 \pmod{q}$ sein. Aus $n = p^r$ und $r = 2j + 1$ folgt sodann $(p|q) = 1$, d.h. die Behauptung (a).

Der quadratfreie Faktor von n besteht aus der Primzahl p allein; die Behauptung (b) ist gerade die Aussage (ii) von Satz 12.

Ist $v = n^2 + n + 1 \equiv -1 \pmod{4}$, so folgt $n \equiv 1 \pmod{4}$, da p ungerade, und weiter $p \equiv 1 \pmod{4}$, da r ungerade ist. Also ist $(-1|p) = 1$ und folglich $(d|p) = (d|p)(-1|p) = (-d|p)$. Da andererseits nach Satz 13, (ii) eines der Legendre-Symbole $(d|p)$, $(-d|p)$ gleich Eins sein muß, folgt die Behauptung (c).

Die Behauptungen (d) und (e) sind ebenfalls direkte Folgerungen der Aussage (ii) von Satz 12.

Literatur

- [1] BAER, R.: Homogeneity of projective planes. Amer. J. Math. **64**, 137–152 (1942). — [2] BAER, R.: Projectivities with fixed points on every line of the plane. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 273–286 (1946). — [3] BRUCK, R. H.: Difference sets in a finite group. Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 464–481 (1955). — [4] BRUCK, R. H., and H. J. RYSER: The nonexistence of certain finite projective planes. Canad. J. Math. **1**, 88–93 (1949). — [5] CARMICHAEL, R. D.: Introduction to the theory of groups of finite order. Boston 1937. — [6] CHOWLA, S., and H. J. RYSER: Combinatorial problems. Canad. J. Math. **2**, 93–99 (1950). — [7] HALL jr., M.: Projective planes and related topics. California Institute of Technology 1954. — [8] HALL, M., and H. J. RYSER: Cyclic Incidence Matrices. Canad. J. Math. **3**, 495–502 (1951). — [9] HASSE, H.: Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen. Crelle's J. reine u. angew. Math. **152**, 205–224 (1923). — [10] HUGHES, D. R.: Bull. Amer. Math. Soc. **62**, 350, 552 (1956). — [11] JONES, B. W.: The arithmetic theory of quadratic forms. Carus Monographs, New York 1950. — [12] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955. — [13] QVIST, B.: Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. Ann. Acad. Sci. Fenn. **134** (1952). — [14] SINGER, J.: A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 377–385 (1938). — [15] WIELANDT, H.: Permutationsgruppen. Vorlesungsausarbeitung von J. ANDRÉ, Tübingen 1954/55.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 22. Mai 1957)

Extremal structure of convex sets. II¹⁾

By

V. L. KLEE, jr.

1. Introduction

The present paper (a sequel to [12]) is a potpourri of results, examples, and questions concerning the extremal structure of convex sets. It deals mainly with exposed points of convex sets (in the sense of STRASZEWICZ [15]) but treats other matters also. Some of its principal results are incomplete, but are published in their present form in the hope that some interested reader may be able to improve them. Among the main contributions are perhaps the examples which illuminate the relationship between exposed points and extreme points, and the list of unsolved problems.

As in [12], attention will generally be restricted to convex sets which are linearly closed and contain no line. The notation and terminology of [12] will be employed without further explanation, but some additions are necessary. An *exposed point* of a set X in a topological linear space is a point $p \in X$ such that X is supported at p by a closed hyperplane which intersects X only at p . Thus an exposed point is simultaneously a special sort of extreme point and a special sort of support point. Note that (in contrast to that of extreme point) this notion depends in an essential way on the topology of the containing space and not merely on the linear structure of X . An *exposed ray* of X is a closed half-line $\varrho \subset X$ such that $\varrho = H \cap X$ for some closed supporting hyperplane H of X . The set of all exposed points of X will be denoted by $\exp C$ and the union of all exposed rays by $\text{rexp } C$. We deal also with $\text{su } X$, the set of all support points of X , and $\text{sm } X$, the set of all smooth points of X . A point $p \in X$ is in $\text{su } X$ [resp. $\text{sm } X$] provided there is a [unique] closed hyperplane which supports X at p .

The most important "positive" results of the paper are in § 2, where it is proved that $\text{ext } C \subset \text{cl } \exp C$ and $C = \text{cl } \text{conv } (\exp C \cup \text{rexp } C)$ whenever C is a locally compact closed convex subset of a normed linear space, and C contains no line. The relationship between $\text{ext } C$ and $\exp C$ is studied further in § 3. In § 4 is a description of the duality between the operators "exp" and "sm", and use of this to derive the existence of exposed points from theorems on the existence of smooth points. A few more remarks, problems, and examples appear in § 5. The concluding § 6 describes a construction method for convex functions, and applies it to produce a three-dimensional compact convex body C such that $\text{bdry } C \sim \text{ext } C$, $\text{ext } C \sim \exp C$, and $\exp C$ are all dense in $\text{bdry } C$.

¹⁾ Based on research sponsored in part by the Office of Ordnance Research, U.S. Army, under Contract DA-04-200-ORD-292, and supported in part by a fellowship from the Sloan Foundation.

2. Exposed points and rays

We begin with

(2.1) Theorem²). If C is a compact convex subset of a normed linear space E , then $\text{ext } C \subset \text{cl exp } C$ and $C = \text{cl conv exp } C$.

Proof. We assume without loss of generality that E is separable. By a theorem of DAY [5, p. 519] the topology of E can be generated by a norm whose unit cell is both smooth and strictly convex. We assume that E is metrized by such a norm $\|\cdot\|$. Now let A be the set of all $q \in C$ such that q is farthest in C from some $p \in E$. (Since C is compact, A is nonempty.) From the strict convexity of $\|\cdot\|$ it follows that q is an exposed point of the set $\{u: \|u - p\| \leq \|q - p\|\}$, and hence of C . Thus $A \subset \text{exp } C$. And since the second statement of (2.1) implies the first (see [2], or (1.4) of [12]), to complete the proof of (2.1) it suffices to show that $\text{cl conv } A = C$.

Let $B = \text{cl conv } A$ and suppose there exists $x \in C \sim B$. Let z be the point of B nearest to x and let H be the hyperplane through $y = \frac{1}{2}(x + z)$ such that $H + (z - y)$ separates $\{v: \|v - x\| \leq \|z - x\|\}$ from B . For each positive integer n , let $z_n = y + n(z - y)$ and let K_n be the open cell $\{w: \|w - z_n\| < \|y - z_n\|\}$. Then K_n is an increasing sequence of open sets whose union is the entire open halfspace which contains B and is bounded by H . (This follows from the fact that the unit cell is smooth, whence $y \in \text{sm } K_n$.) Since B is compact, there exists m for which $B \subset K_m$. For each $b \in B$ we then have $\|b - z_m\| < \|y - z_m\| = \|x - z_m\| - \|x - y\|$, whence we conclude that the point of C farthest from z_m is not in B . This is a contradiction and completes the proof.

The preceding proof is quite similar to that of STRASZEWICZ [15], who proved the theorem in E^n . A stronger result will be established in § 4, but by a less direct argument involving duality.

To deal with exposed rays we need the following remark ((5.1) of [10]).

(2.2) A closed convex subset of a normed linear space is locally compact if and only if each of its bounded closed subsets is compact.

The following is the principal theorem of this paper, and should be compared with (3.4) and (3.5) of [12].

(2.3) Theorem. Suppose C is a locally compact closed convex subset of a normed linear space, and C contains no line. Then $\text{ext } C \subset \text{cl exp } C$ and $C = \text{cl conv } (\text{exp } C \cup \text{rexp } C)$.

Proof. Consider $p \in \text{ext } C$ and $\varepsilon > 0$, and let $K = \{x \in C: \|x - p\| \leq 1\}$. Then of course $p \in \text{ext } K$, and K is compact by (2.2), so from (2.1) we deduce the existence of $q \in \text{exp } K$ with $\|q - p\| < \varepsilon$. Thus there is a closed hyperplane H supporting K at q such that $H \cap K = \{q\}$. It is then evident that $H \cap C = \{q\}$ and $q \in \text{exp } C$, whence we conclude that $\text{ext } C \subset \text{cl exp } C$.

²) We should point out that no novelty is claimed for the proofs of (2.1) and (4.5), which are included here for the sake of completeness. The first of these is a direct extension of the argument of STRASZEWICZ [15], the second a modification of proofs of YOSIDA and FUKAMIYA [16] and MILMAN [14].

Now let $A = cl \text{ conv } (\exp C \cup \text{rexp } C)$, and suppose $A \neq C$. Then there are a continuous linear functional F on E and a real constant k such that $k \in FC$ but $k+1 < \inf FA$. Let $B = C \cap F^{-1}] - \infty, k+1]$ and note that $F^{-1}] - \infty, k+1] \cap \text{ext } B \subset \text{ext } C \subset cl \text{ exp } C$, whence we conclude that $\text{ext } B \subset F^{-1}(k+1)$. From (3.3) of [12] it follows that $C \cap F^{-1}k$ has an extreme point and then (again by the result established in the first paragraph of this proof) that $C \cap F^{-1}k$ has an exposed point y . Since $y \notin \text{ext } B$, there exists $x \in C$ such that $Fx < k$ and $[x, 2y - x] \subset B$. With $D = \{t: y + t(x - y) \in C\}$, we see readily that the endpoints of $y + D(x - y)$ must lie in $\text{ext } C$. If $\sup D = s < \infty$ we have $y + s(x - y) \in \text{ext } B \sim F^{-1}(k+1)$, an impossibility. It follows that $\sup D = \infty$ and (since C contains no line) $\inf D > -\infty$. Now since y is an exposed point of $C \cap F^{-1}k$, there is a closed hyperplane H in $F^{-1}k$ such that H supports the set $C \cap F^{-1}k$ and $H \cap C = \{y\}$. Let J be the hyperplane $H + R(x - y)$ in E . It is easy to check that $J \cap C = y + D(x - y)$, whence $y + D(x - y)$ is an exposed ray of C . But then A intersects B and the contradiction completes the proof.

3. Exposed points and extreme points

We observed in (2.3) that for certain sets C , $\exp C$ is dense in $\text{ext } C$. Simple examples suggest that, in fact, $\exp C$ includes "almost all" of $\text{ext } C$ in terms of category or measure. We have no satisfactory results on this, but will proceed to some further remarks on the subject. Proof of the following is left to the reader.

(3.1) *If C is a locally compact closed convex subset of a normed linear space, then $\text{ext } C$ is a G_δ set in C .*

Thus $\text{ext } C$ is topologically complete and $\exp C$ is dense in $\text{ext } C$. If, in addition, $\exp C$ is a G_δ set in C (or at least contains a dense G_δ subset of $\text{ext } C$) then we can say that, in terms of category, $\exp C$ includes "almost all" of $\text{ext } C$. Unfortunately, we have only partial results in this direction.

(3.2) *Suppose C is a closed convex body with boundary B , and C is finite-dimensional and smooth ($\text{sm } C = B$) or C is two-dimensional. Then $\exp C$ is a G_δ set in B and $\text{ext } C \sim \exp C$ is a first category F_σ set in $\text{ext } C$.*

Proof. For the two-dimensional case, observe that each member of $\text{ext } C \sim \exp C$ must be an endpoint of a maximal segment of B , and there are only countably many such segments.

Now suppose C is finite-dimensional and smooth, and for each $x \in B$ let H_x be the unique hyperplane which supports C at x . For each $\varepsilon > 0$, let B_ε be the set of all $x \in B$ for which the diameter of $H_x \cap B$ is at least ε . It is easy to check that each set B_ε is closed and that $\exp C = B \sim \bigcup_1^\infty B_{1/n}$. Since $\exp C$ is dense in $\text{ext } C$, each set $B_{1/n} \cap C$ is nowhere dense in $\text{ext } C$, and the desired conclusion follows.

In §6 we shall construct a nonsmooth three-dimensional C for which $\exp C$ is not a G_δ set. However, the possibility remains that $\exp C$ may always contain a G_δ set dense in $\text{ext } C$, so the following question is still open.

(3.3) Problem. *If C is a finite-dimensional closed convex body, must $\exp C$ be of the second category in $\text{ext } C$?*

We show next that even for a two-dimensional C it is possible for $\text{ext } C \sim \exp C$ to be dense in $\text{ext } C$.

(3.4) Example. *For $n \geq 2$, there is in E^n a smooth bounded convex body C such that $\text{ext } C$ is closed and $\text{ext } C \sim \exp C$ is dense in $\text{ext } C$.*

Proof. Since it is easy to construct such a set in E^{k+1} from one in E^k , we restrict our attention to the case $k=2$. An argument similar to but a bit simpler than the one below will produce an unbounded C with the stated properties.

Let I_α be a sequence of nondegenerate pairwise disjoint closed intervals whose union is dense in $]0, 1[$. In any of various ways (which we leave to the reader), one can establish the existence of a continuous monotone map F of $[0, 1]$ onto $[-1, 0]$ such that $F0 = -1$, $F1 = 0$, and $\{I_i\}_1^\infty$ is the collection of all nondegenerate level sets of F (members of $\{F^{-1}t : t \in [-1, 0]\}$). Let g be a continuous strictly monotone map of $[-1, 0[$ onto $[0, \infty[$ with $g(-1) = 0$ and $\int_0^1 (g \circ F) < \infty$. (Existence of such a g will be established below.) For each $x \in [0, 1]$, let $hx = \int_0^x (g \circ F)$. Then h is differentiable on $[0, 1[$ and continuous on $[0, 1]$, with $h' = g \circ F$, monotone, so h is convex. And since $\{I_i\}_1^\infty$ is the set of nondegenerate level sets of h' , it is clear that with $J = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \geq Fx\} \subset E^2$, $\text{ext } J$ and $\exp J$ are merely the restrictions of F to the complements in $[0, 1]$ of $\bigcup_1^\infty \text{int } I_i$ and $\bigcup_1^\infty I_i$ respectively. Then with $C = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq |Fx|\}$, it is easy to check that C has the desired properties.

To complete the proof of (3.4), we need merely produce g as described. Since $F \bigcup_1^\infty I_i$ is countable, there is a sequence s_α in $[0, 1[\sim F \bigcup_1^\infty I_i$ such that $s_0 = 0$ and always $s_k > s_{k-1} > 1 - 2^{-2k}$. Then Fs_α is a strictly increasing sequence in $[0, 1[$ and there is a continuous strictly monotone function g on $[-1, 0[$ to $[0, \infty[$ such that always $g(Fs_k) = 2^k$. We then have

$$\int_0^1 (g \circ F) < \sum_1^\infty g(Fs_k) (s_k - s_{k-1}) < \sum_1^\infty 2^k (1 - s_{k-1}) < \sum_1^\infty 2^{-k} < \infty.$$

Although $\exp C$ may be a proper dense subset of $\text{ext } C$, in the two-dimensional case it cannot be a proper dense subset of the boundary B of C , for $\text{ext } C$ is closed for two-dimensional C , and $\text{ext } C = B$ implies $\exp C = B$. However, we produce in § 6 a three-dimensional convex body C for which $B \sim \text{ext } C$, $\text{ext } C \sim \exp C$, and $\exp C$ are all dense in B .

Let us next consider a convex cone C with vertex $\emptyset$. Clearly no point other than $\emptyset$ is an extreme point of C , and $\emptyset \in \text{ext } C$ if and only if $C \cap -C = \{\emptyset\}$. When must $\emptyset$ be an exposed point of C ?

From (2.5) and (2.7) of [II] we obtain

(3.5) Suppose C is a closed convex cone with vertex $\emptyset$ in the locally convex Hausdorff linear space E . Suppose $\emptyset$ is an extreme point of C and either C is locally compact or E is separable and normable. Then $\emptyset$ is an exposed point of C .

For E normable but nonseparable, the conclusion need not hold, as is seen by inspection of the positive cones in the spaces $c_0 \mathfrak{N}_1$ and $l^p \mathfrak{N}_1$ for $p \in]1, \infty[$. This suggests

(3.6) Problem. Must each nonseparable normed linear space contain a closed convex cone C such that $\emptyset \in \text{ext } C \sim \text{exp } C$?

The following result is somewhat related to the previous discussion and will be used also in § 4.

(3.7) In each infinite-dimensional separable normed linear space E there is a closed convex body K which has no exposed point and just one extreme point.

Proof. Let H be a hyperplane through $\emptyset$ in E , and Rz a line supplementary to H in E . We wish to construct a total sequence $\{F_n\}_0^\infty$ of continuous linear functionals on H such that $\{F_n\}_1^\infty$ is not total and such that for each $k \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{\|x\| : F_0 x = k, F_n x = 0\} = \infty$. Suppose for the moment that this has been done, and let us see how to proceed.

For $x \in H$, let $\varphi_0 x = 0$ when $F_0 x \leq 0$, $\varphi_0 x = (F_0 x)^2$ when $F_0 x \geq 0$, and $\varphi_n x = |F_n x|$ for $n \geq 1$. Let $\{a_n\}_0^\infty$ be a sequence of positive numbers such that $\sum_0^\infty a_i \varphi_i x \leq 1$ whenever $\|x\| \leq 1$, and let $g = \sum_0^\infty a_i \varphi_i$. Then g is a continuous convex function on H and the set $K = \bigcup_{x \in H} (\{x\} + [g x, \infty[z)$ is a closed convex body in E .

Observe that if $x \in H \sim \{\emptyset\}$ then the segment $] -x, x[$ crosses at least one of the hyperplanes $F_j^{-1} 0$, for $\{F_n\}_0^\infty$ is total. From the definition of φ_j we see that φ_j is not linear on $] -x, x[$, so neither is g . Since g is not linear on any open segment through $\emptyset$, we conclude that $\emptyset$ is an extreme point of K .

To show that K has no extreme point other than $\emptyset$, we show that for each $y \in H \sim \{\emptyset\}$, g is linear on some open segment through y . When $F_0 y = 0$, this is obvious, for each φ_n is then linear on the entire ray $]0, \infty[y$. On the other hand, if $F_0 y = k \neq 0$, it follows from one of the conditions on $\{F_n\}_0^\infty$ that the set $J = \{j : F_j y = 0\}$ is finite and $y \notin \text{cl } \bigcup_{k \notin J} F_k^{-1} 0$. Thus y is an inner point of a segment which lies in $F_0^{-1} k \cap \bigcap_{j \in J} F_j^{-1} 0$ and misses $\bigcup_{k \notin J} F_k^{-1} 0$. Each φ_n is linear on this segment, so g must be also.

Now since $\{F_n\}_1^\infty$ is not total, there exists $u \in H$ such that $F_0 u \neq 0$ but $F_n u = 0$ for all $n \geq 1$. And $g|_{Ru} = \varphi_0|_{Ru}$, which is differentiable on Ru and is linear on either $[0, \infty[u$ or $] -\infty, 0] u$. It follows that $\emptyset$ is not an exposed point of K , and to complete the proof of (3.7) it remains only to produce $\{F_n\}_0^\infty$ as described.

Let P be a hyperplane through $\emptyset$ in H and Rq a line supplementary to P in H , so that each point x of P has a unique expression in the form $x = x_1 + x_2 q$, with $x_1 \in P$ and $x_2 \in R$. Let $\{u_i\}_1^\infty$ be a total sequence of continuous linear

functionals on P , each of norm one. Now for each $x \in H$, let $F_0 x = x_2$ and let $F_n x = u_n x_1 + n x_2$ for $n \geq 1$. It is easy to check that $\{F_n\}_1^\infty$ has the desired properties, and the proof of (3.7) is complete.

4. Exposed points and smooth points

An alternative approach to the existence of exposed points is by way of a dual relationship between the operators "exp" and "sm", quite analogous to that between the notions of strict convexity and smoothness for normed linear spaces. These and similar dualities are discussed in [3, 4, 5, 8, 16]. The duality between "exp" and "sm" is indicated in the following proposition, which employs the terminology of [3].

(4.1) *Suppose the real linear spaces E and F are dual with respect to a bilinear form $\langle, \rangle$. Suppose A is an E -closed convex subset of F , with $\emptyset \in A$, A^0 is its polar $\{x \in E: \langle x, a \rangle \leq 1 \text{ for all } a \in A\}$, $u \in A$, and the set $u^* = \{x \in A^0: \langle x, u \rangle = 1\}$ is nonempty. Then $u \in \text{sm } A$ implies that u^* intersects $\text{exp } A^0$, and $u \in \text{exp } A$ implies that u^* intersects $\text{sm } A^0$.*

Proof. If $u \in A$ and $x \in u^*$, the set $\{v \in F: \langle x, v \rangle = 1\}$ is an E -closed hyperplane in F which supports A at u . With $u \in \text{sm } A$, we conclude that u^* consists of a single point z and thus the set $\{y \in E: \langle y, u \rangle = 1\}$ is an F -hyperplane which supports A^0 and intersects A^0 only at z . Thus $u^* \subset \text{exp } A^0$.

Now suppose $u \in \text{exp } A$, so there exists $y \in E \sim \{\emptyset\}$ having $\langle y, v \rangle \leq \langle y, u \rangle$ for all $v \in A$, with equality only for $v = u$. Since $\emptyset \in A$, $\langle y, u \rangle \geq 0$. If $\langle y, u \rangle > 0$, let $z = \langle y, u \rangle^{-1} y$. If $\langle y, u \rangle = 0$, pick $x \in u^*$ and let $z = x + y$. In either case it can be verified that $\langle z, v \rangle \leq 1 = \langle z, u \rangle$ for all $v \in A$, with equality only for $v = u$. It follows that $z \in u^* \cap \text{sm } A^0$ and the proof of (4.1) is complete.

In applying (4.1), the following remark will be useful.

(4.2) *Suppose E and F are dual under a bilinear form $\langle, \rangle$ and C is an F -compact convex subset of E with $\emptyset \in C$. Then for each $u \in C^0 \sim \text{core } C^0$ there exists $x \in C$ with $\langle x, u \rangle = 1$.*

Proof. Observe first that since C is F -bounded, $\emptyset \in \text{core } C^0$. Now consider $u \in C^0 \sim \text{core } C^0$ and n a positive integer. Then $(1 + \frac{1}{n})u \notin C^0$ and since C^0 is E -closed and convex it follows by the separation theorem that there exists $x_n \in E$ with $\langle x_n, (1 + \frac{1}{n})u \rangle = 1$ and $\langle x_n, v \rangle \leq 1$ for all $v \in C^0$. But then of course $x_n \in (C^0)^0 = C$, and by compactness of C , the sequence x_α must have a cluster point $x \in C$. Since $\langle x_n, u \rangle = n/(n+1)$, we see that $\langle x, u \rangle = 1$ and the proof is complete.

In conjunction with (4.1) we employ the following slight extension of MAZUR's smoothness theorem [13], which can be proved by an easy adaptation of his argument.

(4.3) *Suppose P is a closed convex body in a topological linear space G , B is its boundary, H is a set of continuous linear functionals on G , and J is the set of points in B at which P can be supported by more than one H -hyperplane*

(i.e., a hyperplane of the form $h^{-1}c$ for $h \in H$). Suppose there is a countable subset of G which is not contained in any intersection $(h^{-1}0) \cap (k^{-1}0)$ for $h, k \in H$. Then J is of the first category in B .

We use also the following result, stated by ARMS [1]:

(4.4) Suppose G is a uniformly smooth Banach space, H is its conjugate space, and P, B , and J are as in (4.3). Then J is of the first category in B .

A space is uniformly smooth in the sense of ARMS [1] if and only if it is uniformly flattened in the sense of DAY [4], and this in turn is equivalent to the condition that its conjugate space is uniformly convex ([4], p. 144 of [3]).

We now deduce an extension of (2.1).

(4.5) Theorem³). Suppose C is a weakly compact convex subset of a Banach space E , and E is either separable or uniformly convex. Then $cl \text{ conv exp } C = C$.

Proof. We assume without loss of generality that $0 \in C$. Let F be the conjugate space of E and use subscripts to indicate the various topologies on E and F (n for the norm topology, w for the weak topology, etc.). Then E_w and F_w^* are dual in the usual way, so that (4.1) will apply. Let $K = cl \text{ conv exp } C$, $P = C^0$, and $Q = K^0$. Then P is a w^* -closed convex subset of F (hence is also n -closed), and since C is bounded the neutral element of F must be n^* -interior to P . Now with B denoting the n^* -boundary of P , B must be n^* -complete, and from (4.3) and (4.4) we see that the set J of all points of B at which P can be supported by more than one E -hyperplane is of the first category in B_{n^*} . Thus $B \sim J$ is n^* -dense in B .

Since $C = P^0$ and $K = Q^0$, to complete the proof it suffices to show that $P = Q$. Suppose $P \neq Q$. Then since $P \subset Q$, both sets are convex, and P has nonempty n^* -interior, there exists $F \in (B \sim J) \cap \text{int}_{n^*} Q$. By (4.2) it follows that $Fx = 1$ for some $x \in C$, and thus $F \in \text{sm } P$ (relative to support by E -hyperplanes). Now [in the notation of (4.1)] we have $F^* = \{x\}$, and $x \in \text{exp } P^0 = \text{exp } C \subset K$. But since $[0, F] \subset \text{int}_{n^*} Q$, there exists $\delta > 1$ for which $\delta F \in Q$ and we have $\delta Fx > 1$, a contradiction since $x \in K$ and $\delta F \in K^0$. The proof is complete.

The hypotheses of (4.5) seem unnecessarily strong, but even the following appears to be open:

(4.6) Problem. Suppose C is a bounded closed convex body in a reflexive Banach space. Must C have an exposed point, or a smooth point?

This may be related to the problem [5] of whether every reflexive space is strictly convexifiable, or smoothable.

It would be nice to have a useful characterization of those locally convex Hausdorff linear spaces in which "every compact convex subset is the closed convex hull of its set of exposed points". Some condition rather close to normability may be needed. In any case, metrizable is inadequate even in the separable case, for in the locally convex separable metrizable space $R^{\aleph_0}$, the compact cube $[-1, 1]^{\aleph_0}$ has no exposed points. The proof of (4.5) shows that

³) See footnote number 2.

the space E_{u*}^* has the property "... for each separable Banach space E , and separability seems essential here, for the space $(l^1 \aleph_1)_{u*}^*$ lacks the property.

From (4.5) and the converse to the KREIN-MILMAN theorem ([2], or (1.1) of [12]) we conclude

(4.7) *With C and E as in (4.5), $\text{exp } C$ is weakly dense in $\text{ext } C$. If C is norm-compact, then $\text{exp } C$ is norm-dense in $\text{ext } C$.*

When C is merely weakly compact, $\text{exp } C$ need not be norm-dense in $\text{ext } C$. To see this, let E be an infinite-dimensional separable reflexive space, K as in (3.7), p the lone extreme point of K , and C the intersection of K with the unit cell centered at p . Alternatively, carry out the same construction with $p = \emptyset$ and K the positive cone in $l^2 \aleph_1$.

5. Further remarks and problems

This section contains a few remarks which don't seem to fit in anywhere else. We first mention the possibility of defining a hierarchy of notions of exposed point, weaker than our present notion but still stronger than the notion of extreme point. The weakest of these is as follows: a point p of a convex set C is an *algebraically exposed point* of C provided for each two-dimensional flat V through p , p is an exposed point in V of $C \cap V$ (equivalently, $C \cap V$ is supported in V by a line L such that $L \cap C \cap V = \{p\}$). The following problem seems to be open.

(5.1) Problem. *Must a compact convex set (in a Hausdorff linear space) have an algebraically exposed point?*

Even in locally convex spaces, (5.1) is open, as the extreme points produced by the usual construction need not be algebraically exposed. And for spaces which are not locally convex, (5.1) is unsolved even with "algebraically exposed" replaced by "extreme".

Even for a compact convex subset of Hilbert space, an algebraically exposed point need not be a support point, and can be a support point without being exposed. The second type of behavior is exhibited also by the origin relative to the positive cone in the space $l^2 \aleph_1$. However, we do have the following result, whose proof is quite similar to that of (2.7) in [11].

(5.2) Theorem. *For a closed convex body in a separable normed linear space, each algebraically exposed point is actually exposed.*

For a closed convex body C in a finite-dimensional normed linear space E , it is known that $\text{ext } C \subset \text{su } C$ and that $\text{su } C$ is empty only when $C = E$. Known examples [3] show that neither of these statements need hold when E is infinite-dimensional. The example given below handles both of these matters, and appears to be more perspicuous than previous examples, though similar to them.

(5.3) Example. *Let T be the linear transformation of l^2 into itself with $(Tx)^j = 2^{-j} x^j$ for each $x = (x^1, x^2, \dots) \in l^2$. Let C be the unit cell $\{x: \|x\| \leq 1\}$ of l^2 and S the unit sphere $\{x: \|x\| = 1\}$. Let L be the linear set of all $x \in l^2$ having $\sum_{j=1}^{\infty} (2^j x^j)^2 < \infty$, and M a dense linear subspace of l^2 which is supplementary to L .*

Then TC is a compact convex subset of l^2 whose set of extreme points is TS and whose set of support points is $T(S \cap L)$. And $T(C \cap M)$ is a precompact closed subset of the prehilbert space TM , whose set of extreme points is $T(S \cap M)$ and whose set of support points is empty.

Proof. Since C is weakly compact, TC is also weakly compact and hence closed in l^2 . And TC is a subset of the compact parallelotope $\{x: |x^i| \leq 2^{-i}\}$, so TC must be compact. Since T is linear, it is evident that TC is convex and has TS as its set of extreme points. Now suppose TC can be supported at the point Tq , where $q \in C$. Then there exists $y \in l^2$ such that $\sup_{x \in TC} (y, x) = (y, Tq) = 1$. And $(y, Tx)|_{x \in l^2}$ is a continuous linear functional on l^2 whose maximum value on C is 1 and is attained at q , whence $(y, Tx) = (q, x)$ for all $x \in l^2$. Thus $\sum y^i 2^{-i} x^i = \sum q^i x^i$ for all x , and it follows that $y^i 2^{-i} = q^i$. But then $\sum (2^i q^i)^2 = \sum (y^i)^2 < \infty$, whence $q \in L$ and $Tq \in TL$. Thus every support point of TC is a point of $T(S \cap L)$, and since the reverse inclusion is easily established, the first assertion of (5.3) has been proved.

Now since $T(C \cap M) = TC \cap TM$ and TC is compact, it is clear that $T(C \cap M)$ is a precompact convex subset of TM , closed relative to TM . It remains to show that in TM , $T(C \cap M)$ has no support points. If a non-trivial continuous linear functional on TM attains a maximum on $T(C \cap M)$, then it determines such a functional f on l^2 . And since $T(C \cap M)$ is dense in $TC \cap M$, this implies that some point of TM is a support point of TC , a contradiction completing the proof.

We remark that the only points $q \in S$ such that $T^n q$ is a support point of $T^n C$ for each n , are those which have only finitely many non-zero coordinates. We note also that for each $q \in TS$, there is a linear functional f on l^2 such that $\sup_{TC} f = f q = 1$. The point is that this f can be continuous only for $q \in T(S \cap L)$.

The following problem is open.

(5.4) Problem. Suppose C is a bounded closed convex subset of a Banach space. Must C be supported at some point?

Even in E^3 (and to some extent in the plane), there are many unsolved problems about the topological structure of convex bodies relative to the operators "ext", "exp", and "sm". In infinite-dimensional spaces, there is much to be learned about the operator "su" as well. We cite the following problem as typical.

(5.5) Problem. Find a useful and simple characterization of the class $\mathfrak{X}$ of all subsets X of the unit sphere S in E^3 such that there is a homeomorphism of S onto the boundary of a convex body C mapping X onto $\text{ext } C$.

A relevant result appears in [9]. It is known that each member of $\mathfrak{X}$ is a G_δ set, and that $\mathfrak{X}$ includes each closed subset of S which has at least four points.

There are similar problems involving the other operators mentioned above, and their inter-relationships.

6. A method of construction

We here develop some machinery leading to construction of two examples mentioned in § 3. Rather than working explicitly with convex bodies, we deal instead with convex functions, the idea being to determine an n -dimensional convex function by means of a one-parameter family of $(n-1)$ -dimensional convex functions. The general procedure is quite similar to that in the case $n=1$ (the classical convex function of a single real variable). Complications arising in the infinite-dimensional case are not serious, but do seem to justify supplying the proofs in detail. And looking to future applications, it seems desirable to proceed with more generality than is essential for present purposes.

With R denoting the real number field, R^+ will denote $R \cup \{\infty\}$ with the usual arithmetic conventions and, in addition, $0 \cdot \infty = 0$. An *affine functional* is a function f such that $\text{rng } f \subset R$, $\text{dmn } f$ is a flat in some linear space, and $f(rx + (1-r)y) = r(fx) + (1-r)(fy)$ for all $r \in R$, $x, y \in \text{dmn } f$. A *convex* (resp. *convex⁺*) function γ is one for which $\text{rng } \gamma \subset R$ (resp. R^+), $\text{dmn } \gamma$ is a convex subset of some linear space, and γ is subaffine in the usual way, i.e., $\gamma(rx + (1-r)y) \leq r(\gamma x) + (1-r)(\gamma y)$ for all $r \in [0, 1]$, $x, y \in \text{dmn } \gamma$.

We need the following result, which should be compared with (12.8) of [6] and (2.3) of [7]. (The proof of the latter shows that on each linear space of uncountable dimension there is a positively homogeneous convex^+ function which majorizes no affine functional, even though its restriction to each line is lower semicontinuous.)

(6.1) *On a locally convex Hausdorff linear space E , a convex^+ function is lower semicontinuous if and only if it is the supremum of a family of continuous affine functionals.*

Proof. Since the "if" part is clear, let us consider a lower semicontinuous convex^+ function γ on E , a point $p \in E$, and a number $c < \gamma p$. We wish to produce a continuous affine functional f on E such that $f \leq \gamma$ and $fp > c$. If $\gamma \equiv \infty$ on $E \sim \{p\}$, this is trivial, so we assume that $\gamma q < \infty$ for some $q \in E \sim \{p\}$. Now in $E \times R$, let $K = \{(x, r) : r \geq \gamma x\}$, so that K is closed and convex. For each $d \in R$, let S_d denote the segment $[(p, c), (q, d)]$. We wish to show that some S_d misses K . Suppose not. Then there are a sequence t_α of numbers in $[0, 1]$ and a sequence e_α of numbers in $]-\infty, 0]$ such that $t_\alpha \rightarrow t \in [0, 1]$, $e_\alpha \rightarrow -\infty$, and $(1-t_i)c + t_i e_i \geq \gamma((1-t_i)p + t_i q)$ for each i . If $t \neq 0$, $t_\alpha e_\alpha \rightarrow -\infty$ and from lower semicontinuity of γ we conclude that

$$\gamma((1-t)p + tq) = -\infty,$$

an impossibility. If $t=0$, then $\gamma p \leq c + \liminf t_\alpha e_\alpha \leq c$, contradicting the fact that $c < \gamma p$. Thus there exists $d \in R$ for which $K \cap S_d = \emptyset$.

With $K \cap S_d = \emptyset$, the separation theorem (9.9) of [6] guarantees the existence of a continuous linear functional F on $E \times R$ for which $\sup_{S_d} F < \inf_K F$. Since $\gamma q < \infty$, we have $(q, \gamma q) \in K$, $F(q, d) < F(q, \gamma q)$, and thus $F(\emptyset, 1) > 0$, whence it follows as in (12.1) of [6] that the equation $F(x, fx) = \inf_K F(x \in E)$

determines an affine functional f on E such that $f \leq \gamma$ and $f \not\leq c$. And since $F(x, fx) = F(x, 0) + (fx) F(\emptyset, 1)$, the simple expression for fx in terms of $F(x, 0)$ can be used to deduce continuity of f from that of F . The proof of (6.1) is complete.

The following remark is also useful.

(6.2) Suppose γ is a lower semicontinuous convex⁺ function on a topological linear space E , and $\{x: \gamma x < \infty\}$ is bounded. Then $\inf(\gamma - f) > -\infty$ for each continuous affine functional f on E .

Proof. It suffices to show that $\inf \gamma > -\infty$ for each γ as described, for $\gamma - f$ is also such a function. If $\gamma \equiv \infty$ there is no problem, so suppose $\gamma x < \infty$ for some $x \in E$ and $\gamma y_\alpha \rightarrow -\infty$ for some sequence y_α in E . There is a sequence t_α in $]0, 1[$ such that $t_\alpha \rightarrow 0$ and $t_\alpha(\gamma y_\alpha) \rightarrow -\infty$. By convexity,

$$\gamma((1 - t_\alpha)x + t_\alpha y_\alpha) \leq (1 - t_\alpha)\gamma x + t_\alpha(\gamma y_\alpha) \rightarrow -\infty.$$

But y_α is bounded, so $t_\alpha y_\alpha \rightarrow \emptyset$ and from lower semicontinuity we conclude that $\gamma x = -\infty$, a contradiction completing the proof.

Now let us fix a locally convex Hausdorff linear space E , a closed hyperplane H through $\emptyset$ in E , and a line $R\hat{p}$ supplementary to H in E . Each point $x \in E$ has a unique expression in the form $x = x_1 + x_2\hat{p}$ with $x_1 \in H$ and $x_2 \in R$. For $J \subset R$ or $J \in R$, we write $H_J = H + J\hat{p}$. Let Γ denote the set of all lower semicontinuous convex⁺ functions γ such that for some number $\gamma' \in R$, $d\,m\,n\,\gamma = H_{\gamma'}$ and $\inf(\gamma - f) > -\infty$ for each continuous affine functional f on $H_{\gamma'}$. For $\alpha, \beta \in \Gamma$ with $\alpha' \neq \beta'$, $A_{\alpha, \beta}$ will denote the set of all continuous affine functionals f on E such that $f \leq \alpha \cup \beta$ and $\inf(\alpha - f) = 0 = \inf(\beta - f)$. The function $\sup A_{\alpha, \beta}$ will be denoted by $\sigma_{\alpha, \beta}$. [For functions u and v , $u \vee v$ is the function such that $d\,m\,n(u \vee v) = d\,m\,n\,u \cap d\,m\,n\,v$ and $(u \vee v)x = ux \vee vx$ for each $x \in d\,m\,n(u \vee v)$. We write $u \leq v$ to mean that $ux \leq vx$ for all $x \in d\,m\,n\,u \cap d\,m\,n\,v$. Other similar conventions are employed throughout this section.]

(6.3) If $\alpha, \beta \in \Gamma$ with $\alpha' \neq \beta'$, then $\sigma_{\alpha, \beta}$ is a lower semicontinuous convex⁺ function on E and $\sigma_{\alpha, \beta} > \alpha \cup \beta$.

Proof. Clearly $\sigma_{\alpha, \beta}$ is a lower semicontinuous convex⁺ function, for it is the supremum of a family of continuous affine functionals. To prove that $\sigma_{\alpha, \beta} > \alpha \cup \beta$, it suffices to show that if $y \in H_{\alpha'}$ and $c < \alpha y$, there exists $f \in A_{\alpha, \beta}$ with $fy > c$ (for a similar argument handles points of $H_{\beta'}$). By (6.1), $H_{\alpha'}$ admits a continuous affine functional g such that $gy > c$ and $g \leq \alpha$. For each $x \in H_{\beta'}$, let $hx = g(x + (\alpha' - \beta')\hat{p})$, so that h is the natural "translate" of g to $H_{\beta'}$. Let $d = \inf(\alpha - g) \geq 0$ and $e = \inf(\beta - h) > -\infty$. Now for each $x \in E$, let

$$fx = g(x + (\alpha' - x_2)\hat{p}) + (\mu x_2 + v),$$

where μ and v are determined by the conditions that $\mu\alpha' + v = d$ and $\mu\beta' + v = e$. The function f is easily seen to have the desired properties, and the proof of (6.3) is complete.

(6.4) Suppose $\alpha, \beta \in \Gamma$ with $\alpha' < \beta'$. Let U be the set of all convex⁺ functions u on E such that $\alpha \leq u \leq \beta$, V the set of all lower semicontinuous convex⁺ functions v on E such that $v \leq \alpha \cup \beta$, and W the set of all convex⁺ functions w on E such that $\alpha \geq w \geq \beta$. Then $\sigma_{\alpha, \beta}$ coincides with $\inf U$ on $H_{[-\infty, \alpha']}$, with $\sup V$ on $H_{[\alpha', \beta']}$, and with $\inf W$ on $H_{[\beta', \infty]}$.

Proof. Let $\xi = \inf U$, $\eta = \sup V$, $\zeta = \inf W$. From (6.3) it is evident that on all of E , $\sigma_{\alpha, \beta}$ is $\geq \xi$, $\leq \eta$, and $\geq \zeta$. We wish to show that on certain parts of E , the reverse inequalities hold. The arguments concerning ξ and ζ are essentially identical, so we treat only the first of these. Suppose there exists $x \in E$ with $x_2 \leq \alpha'$ and $\sigma_{\alpha, \beta} x > \xi x$. Then there exist $f \in A_{\alpha, \beta}$ and $u \in U$ such that $fx - ux = \varepsilon > 0$. Let $r = (\beta' - \alpha)/(\beta' - x_2) \in]0, 1]$. Since $\inf(\beta - f) = 0$, there exists $z \in H_{\beta'}$ with $\beta z - fz = \delta < r\varepsilon/(1 - r)$. Let $y = rx + (1 - r)z$, so that $y_2 = \alpha'$. Then since f is affine and u is convex⁺ we have

$$\begin{aligned} fy &= r(fx) + (1 - r)(fz) \geq r(ux + \varepsilon) + (1 - r)(\beta z - \delta) \\ &\geq r(ux) + (1 - r)uz + [r\varepsilon - (1 - r)\delta] \\ &> u(rx + (1 - r)z) = uy \geq \alpha y \geq fy, \end{aligned}$$

a contradiction showing that $\sigma_{\alpha, \beta} = \xi$ on $H_{[-\infty, \alpha']}$.

To show that $\sigma_{\alpha, \beta} = \eta$ on $H_{[\alpha', \beta']}$, it suffices in view of (6.1) to show that if g is a continuous affine functional on E such that $g \leq \alpha \cup \beta$, then $g \leq \sigma_{\alpha, \beta}$ on $H_{[\alpha', \beta']}$. Let $d = \inf(\alpha - g)$ and $e = \inf(\beta - g)$. Then $d \geq 0 \geq e$, and if f be defined as in the proof of (6.3), it is easy to check that $f \in A_{\alpha, \beta}$ and $g \leq f \leq \sigma_{\alpha, \beta}$ on $H_{[\alpha', \beta']}$, thus completing the proof of (6.4).

(6.5) For $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \Gamma$ with $\alpha' < \beta' < \gamma'$, the following three inequalities are equivalent: $\alpha \geq \sigma_{\beta, \gamma}$; $\beta \leq \sigma_{\alpha, \gamma}$; $\gamma \geq \sigma_{\alpha, \beta}$. Equivalence holds also for the corresponding strict inequalities.

Proof. We show only that $\alpha \geq \sigma_{\beta, \gamma}$ implies $\beta \leq \sigma_{\alpha, \gamma}$, for the other implications proceed similarly. If $\alpha \geq \sigma_{\beta, \gamma}$, then $\sigma_{\beta, \gamma}$ is a convex⁺ function which is $\leq \alpha$ and $\geq \beta$ [for $\beta \cup \gamma < \sigma_{\beta, \gamma}$ by (6.3)], so it follows by (6.4) that $\sigma_{\beta, \gamma} \geq \sigma_{\alpha, \beta}$ on $H_{[\alpha(\beta), \infty]}$. Since $\beta < \sigma_{\alpha, \beta}$, this completes the proof.

A subfamily Θ of Γ will be called *admissible* [resp. *strictly admissible*] provided $\alpha = \beta$ whenever $\alpha' = \beta'$ and $\{\alpha, \beta\} \subset \Theta$, and $\beta \leq \sigma_{\alpha, \gamma}$ [resp. $\beta < \sigma_{\alpha, \gamma}$] whenever $\alpha' < \beta' < \gamma'$ and $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \Theta$. When $B \subset \Phi \subset \Gamma$, B is said to be *adjacent* in Φ provided there is no $\varphi \in \Phi$ such that φ' lies between two members of the set $\{\beta' : \beta \in B\}$ without actually being a member of this set (i.e., $\{\varphi' : \varphi \in \Phi\} \cap \text{conv}\{\beta' : \beta \in B\} = \{\beta' : \beta \in B\}$).

(6.6) A finite subfamily Θ of Γ is *admissible* [resp. *strictly admissible*] if (and obviously only if) $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ is *admissible* [resp. *strictly admissible*] whenever $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ is an adjacent subset of Θ .

Proof. We treat only the case of admissibility, since that of strict admissibility is similar. Consider first the situation in which $\Theta = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ with $\alpha' < \beta' < \gamma' < \delta'$. The hypothesis is that $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ and $\{\beta, \gamma, \delta\}$ are admissible; to establish admissibility of $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ we must prove that of $\{\alpha, \beta, \delta\}$ and

$\{\alpha, \gamma, \delta\}$. We consider only the second of these, for the first can be treated similarly. We wish to show that $\alpha \geq \sigma_{\gamma, \delta}$. Suppose not. Then there exists $g \in A_{\gamma, \delta}$ and $x \in H_x$ such that $gx > \alpha x$. Since $\{\beta, \gamma, \delta\}$ is admissible, we know that $\beta \geq \sigma_{\gamma, \delta}$ and hence $g \leq \beta$. Let $c = \inf(\beta - g)$ and for each $x \in E$ let

$$fx = gx_1 + c(x_2 + \gamma')/(\gamma' - \beta').$$

It can be verified that $f \in A_{\beta, \gamma}$ and $f \geq g$ on H_x . But then $f \leq \sigma_{\beta, \gamma}$ and $fx > \alpha x$, while by admissibility of $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ we have $\alpha \geq \sigma_{\beta, \gamma}$. The contradiction shows that $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ is admissible.

Now let S_n be the assertion that (6.6) is true whenever Θ has no more than n members. We have just proved S_4 . Suppose S_n has been proved for all $n < k$ (with $k \geq 5$), and consider a k -membered $\Theta = \{\alpha_i\}_1^k$ with $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \dots < \alpha'_k$. By the inductive hypothesis, the sets $\{\alpha_i\}_1^{k-1}$ and $\{\alpha_i\}_2^k$ are both admissible; to complete the proof we must show that each set $\{\alpha_1, \alpha_j, \alpha_k\}$ is admissible. But admissibility of $\{\alpha_1, \alpha_j, \alpha_k\}$ follows from S_4 as applied to $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_j, \alpha_k\}$ when $j > 2$ and $\{\alpha_1, \alpha_j, \alpha_{k-1}, \alpha_k\}$ when $j < k-1$, so the proof of (6.6) is complete.

For finite $\Theta \subset \Gamma$, let $\sigma_\Theta = \sup\{\sigma_{\alpha, \beta} : \text{adjacent } \{\alpha, \beta\} \subset \Theta\}$.

(6.7) Suppose Θ is finite and admissible, and V_Θ is the set of all lower semicontinuous convex⁺ functions on E which are $\leq \cup \Theta$. Then $\sigma_\Theta > \cup \Theta$, $\sup V_\Theta = \sigma_\Theta$ on $H_{\text{conv}\{\theta' : \theta \in \Theta\}}$, and $\sup V_\Theta = \infty$ elsewhere.

Proof. This is a straightforward application of results (6.3) to (6.6).

(6.8) A subfamily Θ of Γ is admissible if and only if $\cup \Theta$ is contained in a convex⁺ function on E . And Θ is strictly admissible if and only if $\cup \Theta$ is contained in a convex⁺ function γ on E such that $\gamma(tx + (1-t)y) < t\gamma x + (1-t)\gamma y$ whenever $t \in]0, 1[$, $\{x, y\} \subset E$ with $x_2 \neq y_2$, and $\gamma(tx + (1-t)y) < \infty$.

Proof. Suppose first that Θ is admissible, and for each finite $\Phi \subset \Theta$, let τ_Φ be the largest lower semicontinuous convex⁺ function on E which is $\leq \cup \Phi$. As directed by inclusion on Φ , the family $\{\tau_\Phi : \text{finite } \Phi \subset \Theta\}$ is a decreasing net of convex⁺ functions on E , with always $\tau_\Phi > \cup \Phi$ by (6.7). It is easy to check that the pointwise limit of this net is a convex⁺ function on E which contains $\cup \Theta$.

Now suppose conversely that $\cup \Theta$ is contained in a convex⁺ function w on E , and consider $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \Theta$ with $\alpha' < \beta' < \gamma'$. To establish admissibility of Θ , we wish to show that $\gamma \geq \sigma_{\alpha, \beta}$. But $\alpha \geq w \geq \beta$, so it follows from (6.4) that $\sigma_{\alpha, \beta} \leq w$; and since $w > \gamma$, we have $\gamma \geq \sigma_{\alpha, \beta}$.

The case of strict admissibility offers no new difficulty and is left to the reader.

The following result expresses some of the facts already proved in a form which is especially useful for constructing convex functions.

(6.9) Suppose Θ is a finite admissible subfamily of Γ , and t is a real number with $t \in \{\theta' : \theta \in \Theta\}$. Let $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ be adjacent in Θ and such that $\alpha' < \beta' < t < \gamma' < \delta'$. Then $\sigma_{\alpha, \beta} \leq \sigma_{\beta, \gamma} \geq \sigma_{\gamma, \delta}$ on H_t . If μ is an arbitrary member of Γ such that $\mu' = t$ and $\max(\sigma_{\alpha, \beta}, \sigma_{\gamma, \delta}) \leq \mu \leq \sigma_{\beta, \gamma}$, then $\Theta \cup \{\mu\}$ is admissible. This assertion holds

also for strict admissibility, with strict inequalities throughout. (If certain of the functions α, β, γ , and δ do not exist, the corresponding restrictions are regarded as vacuous. Thus, for example, if $t < \vartheta'$ for all $\vartheta \in \Theta$, admissibility of $\Theta \cup \{\mu\}$ requires merely that $\sigma_{\nu, \delta} \leq \mu$.)

We proceed now to construct the examples mentioned in §3, making implicit use of the machinery just developed.

(6.10) Example. There is in E^3 a compact convex body C for which $\exp C$ is not a G_δ set.

Proof. Let E^3 be coordinatized in the usual way, and let E denote the plane $\{x: x^3=0\}$. Let D be the semidisc $\{x: \|x\| \leq 1, x^2 \geq 0, x^3=0\}$ and J the open semicircle $\{x: \|x\|=1, x^2 > 0, x^3=0\}$. Suppose φ is a lower semicontinuous convex function on D with $\varphi \equiv 0$ on J , and K_φ is the set $\{x: (x^1, x^2, 0) \in D, x^3 \in [\varphi(x^1, x^2, 0), 1]\}$. Then K_φ is a compact convex body in E^3 , and we shall show that for an appropriately constructed φ , $\exp K_\varphi$ is not a G_δ set.

For each $r \in]-1, 1[$ and positive integer n , let r^+ be the point $(r, (1-r^2)^{1/2}, 0)$, $L(r)$ the line $\{x: x^1=r, x^2=x^3=0\}$, and $F_{r,n}$ the affine functional on E which has the value $-n$ at $\emptyset$ and vanishes on the line in E which is tangent to J at r^+ . It can be verified that for each $r \in]-1, 1[$, the following statements are equivalent: (i) $r^+ \in \exp K_\varphi$; (ii) for some $n > 0$, $\varphi \geq F_{r,n}$ on D ; (iii) for some $n > 0$, $\varphi \geq F_{r,n}$ on $[(r, 0, 0), r^+]$. For each n , let X_n be the set of all $r \in]-1, 1[$ for which $\varphi \geq F_{r,n}$ on D . Then each X_n is closed and $J \cap \exp K_\varphi = \{x^+: x \in \bigcup_1^\infty X_n\}$. We show below that there exists a lower semicontinuous convex φ for which both $\bigcup_1^\infty X_n$ and $]-1, 1[\sim \bigcup_1^\infty X_n$ are dense in $]-1, 1[$. For such a φ , $\exp K_\varphi$ is not a G_δ set, since $]-1, 1[$ cannot contain disjoint dense G_δ sets.

Let V be a countable dense subset of $]-1, 1[$, and $\{v_i\}_1^\infty$ an enumeration of the members of V . Let M be the set of all pairs (i, j) of positive integers with $j \leq i$, and $<$ the antireflexive lexicographic ordering on M . Clearly there exist $w_{11} \in]0, 1[\cap N_1 v_1 \sim V$ and continuous convex γ_{11} on $L(w_{11})$ such that $\gamma_{11} w_{11}^+ = 0$, $\gamma_{11} < 0$ on $L(r) \cap D \sim \{w_{11}^+\}$, $\gamma_{11} \gamma_{11} < F_{v_1, 1} \gamma_{11}$ for some $\gamma_{11} \in D$, and $\gamma_{11} \geq F_{w_{11}, n_{11}}$ for some $n_{11} > 0$. We wish to proceed by induction to choose $w_{ij}, \gamma_{ij}, y_{ij}$, and n_{ij} for all $(i, j) \in M$. Suppose this has been done for all $(i, j) < (a, b) \in M$ in such a way that the following conditions are satisfied: (1) the γ_{ij} 's already chosen are continuous and convex, form an admissible family, vanish where defined on J , and have values < 0 where defined on $D \sim J$; (2) $d m n \gamma_{ij} = L(w_{ij})$, and $w_{ij} \in]0, 1[\cap N_{1/j} v_i \sim (V \cup \{w_{cd}: (c, d) < (i, j)\})$; (3) $y_{ij} \in D \cap L(w_{ij})$ and $\gamma_{ij} y_{ij} < F_{v_i, j}$; (4) n_{ij} is a positive integer and $\gamma_{ij} \geq F_{w_{ij}, n_{ij}}$. Then it is not hard (though a bit tedious) to establish the existence of $\varepsilon > 0$ such that for each $r \in N_\varepsilon v_a \sim (V \cup \{w_{ij}: (i, j) < (a, b)\})$, the desired $w_{ab}, \gamma_{ab}, y_{ab}$, and n_{ab} can be obtained with $w_{ab} = r$. Thus we may continue, to obtain for all $(i, j) \in M$ the $w_{ij}, \gamma_{ij}, y_{ij}$, and n_{ij} satisfying conditions (1) to (4) above.

It can be verified that the function $\bigcup_{(i,j) \in M} \gamma_{ij}$ has a unique lower semicontinuous convex⁺ extension ξ to $\bigcup_{r \in [1,1]} L(r)$, with $\xi \equiv 0$ on J . Let φ be the restriction of ξ to D . Then with the X_n 's as defined above, it is clear that $\bigcup_1^\infty X_n \supset \{w_{ij} : (i,j) \in M\}$ and $J \sim \bigcup_1^\infty X_n \supset V$. The proof of (6.10) is complete.

We conclude with

(6.11) Example. *There is in E^3 a compact convex body C with boundary B such that $B \sim \text{ext } C$, $\text{ext } C \sim \text{exp } C$, and $\text{exp } C$ are all dense in B .*

Proof. Let $E, D, J, V, \{\gamma_i\}_1^\infty, r^+$, and $L(r)$ be as in the proof of (6.11). Then construct (by use of mathematical induction) a *strictly* admissible family $\{\gamma_i\}_1^\infty$ of continuous convex functions such that for each n , $\bigcap_{m \geq n} \gamma_n = L(v_n)$, $\gamma_n v_n^+ = 0$, $\gamma_n < 0$ on $L(v_n) \cap D \sim \{v_n^+\}$, and such that within a distance of $< 1/n$ from each point of γ_n there are exposed points of γ_n , extreme points of γ_n which are not exposed, and nonextreme points of γ_n . Let ζ be the lower semicontinuous extension of $\bigcup_1^\infty \gamma_n$ to E . Since $\{\gamma_i\}_1^\infty$ is *strictly* admissible, it is clear that $\text{exp } \gamma_n \subset \text{exp } \zeta$, $\text{ext } \gamma_n \subset \text{ext } \zeta$. Thus with

$$C = \{x : (x^1, |x^2|, 0) \in D, |x^3| \leq |\zeta(x^1, |x^2|, 0)|\},$$

we see that C has the desired properties.

It seems probable that a more careful construction in (6.11) would produce a smooth C with the properties described, but this has not been checked in detail.

References

- [1] ARMS, R. J.: Convex bodies, tangential points. Bull. Amer. math. Soc. **61**, 136, Abstract 217 (1955). — [2] BOURBAKI, N.: Espaces Vectoriels Topologiques (v. 1). Actual. sci. industr. 1189, Paris (1953). — [3] BOURBAKI, N.: Espaces Vectoriels Topologiques (v. 2). Actual. sci. industr. 1229, Paris (1955). — [4] DAY, M. M.: Uniform convexity in factor and conjugate spaces. Ann. of Math. **45**, 375–385 (1944). — [5] DAY, M. M.: Strict convexity and smoothness of normed spaces. Trans. Amer. math. Soc. **78**, 516–528 (1955). — [6] KLEE jr., V. L.: Convex sets in linear spaces. Duke math. J. **18**, 443–466 (1951). — [7] KLEE jr., V. L.: Convex sets in linear spaces. III. Duke math. J. **20**, 105–112 (1953). — [8] KLEE jr., V. L.: Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space. Trans. Amer. math. Soc. **74**, 10–43 (1953). — [9] KLEE jr., V. L.: A note on extreme points. Amer. math. Monthly **62**, 30–32 (1955). — [10] KLEE jr., V. L.: Some topological properties of convex sets. Trans. Amer. math. Soc. **78**, 30–45 (1955). — [11] KLEE jr., V. L.: Separation properties of convex cones. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 313–318 (1955). — [12] KLEE jr., V. L.: Extremal structure of convex sets. I. Archiv der Math. **8**, 234–240 (1957). — [13] MAZUR, S.: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. Studia Math. **4**, 70–84 (1933). — [14] MILMAN, D.: Accessible points of a functional compact set (Russian). Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **59**, 1045–1048 (1948). — [15] STRASZEWICZ, S.: Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktfolgen. Fund. Math. **24**, 139–143 (1935). — [16] YOSIDA, K., and M. FUKAMIYA: On regularly convex sets. Proc. Imp. Acad. Japan **17**, 49–52 (1941).

Dept. of Math., The University, Seattle, Wash. (U.S.A.)

(Eingegangen am 8. September 1957)

Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik

Eine Einführung in die Theorien von A. Tarski und R. Carnap. Von Dr. **Wolfgang Stegmüller**, tit. a. o. Professor an der Universität Innsbruck. X, 328 Seiten Gr.-8°. 1957. Ganzleinen DM 33.—

Semantische Begriffsbildungen und Methoden spielen in den modernen philosophischen Untersuchungen, insbesondere innerhalb der Erkenntnistheorie und Grundlagenforschung, eine zunehmende Rolle. Auch in der formalen Logik hat sich die Auffassung vom Primat der semantischen vor der axiomatischen oder syntaktischen Betrachtungsweise weitgehend durchgesetzt. Ein ernsthaftes Studium der modernen wissenschaftlichen Philosophie ist daher ohne gründliche semantische Kenntnisse nicht mehr möglich. Die vorliegende Darstellung gibt eine Einführung in das gesamte Problemgebiet der Semantik, die von den beiden Logikern A. Tarski und R. Carnap systematisch zu einer exakten Wissenschaft ausgebaut worden ist. Der Verfasser war bemüht, den Leser ebenso in technische Details einzuführen wie den Zusammenhang mit traditionellen philosophischen Fragestellungen herzustellen.

In einem ersten Teil werden die Prinzipien des Aufbaues semantischer Systeme geschildert. Ferner wird darin eingehend die Frage diskutiert, wie ein exakter und inhaltlich adäquater Wahrheitsbegriff in formalisierte Sprachen eingeführt werden könne, sowohl in Sprachen von elementarem Charakter als in solche von komplizierter logischer Struktur. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit der L-Semantik, in welcher das Gebiet des rein Logischen vom Nichtlogischen abgegrenzt und ein neuer Einblick in die Natur logischer Zusammenhänge gewährt wird. Es folgt eine ausführliche Schilderung und Diskussion der von Carnap entwickelten neuen Methode der Bedeutungsanalyse. Ein eigenes Kapitel ist der logischen Syntax und der Beziehung zwischen formalen logischen Kalkülen und semantischen Interpretationen dieser Kalküle gewidmet. In einem umfangreichen letzten Abschnitt werden die Anwendungen der Semantik in Logik, Metamathematik, Erkenntnislehre und Theorie des induktiven Schließens aufgezeigt. Ferner werden bisher vorgebrachte Einwendungen gegen die Semantik einer Kritik unterzogen und einige offene Probleme erörtert.

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

In Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.
Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, W. Magnus, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

XCII. Band: **Darstellende Geometrie**

Von Dr. Fritz Rehbock, o. Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Braunschweig. Mit 110 ganzseitigen Abbildungen und 2 Porträts. XV, 232 Seiten Gr.-8°. 1957. DM 23.—; Ganzleinen DM 26.80

Aus dem Vorwort:

Dieses kleine Handbuch der Darstellenden Geometrie bringt in gedrängter Form den Stoff, der auch heute noch in einer vier- bis fünfstündigen Vorlesung unseren Mathematikern, Ingenieuren und Architekten an einer deutschen Universität oder Technischen Hochschule geboten werden kann oder müßte. Die Figuren dieses Buches sind zum Unterschied von denen vieler älterer Bücher sehr groß und nach Möglichkeit frei von entbehrlichen Hilfslinien gestaltet, aber dennoch so, daß jede Konstruktion nahezu allein durch „Lesen“ der Figur verstanden werden kann. Der zugehörige Text steht genau neben jeder Bildseite.

XCIV. Band: **Kontinuierliche Geometrien**

Von Dr. Fumitomo Maeda, Professor der Mathematik an der Universität Hiroshima. Übersetzt und für die deutsche Ausgabe bearbeitet von Sibylla Crampe, Tübingen, Dr. Günter Pickert, apl. Professor, Tübingen, Dr. Rudolf Schauffler, Oberregierungsrat a. D., Urach. Mit 12 Abbildungen. X, 244 Seiten Gr.-8°. 1958.

DM 36.—; Ganzleinen DM 39.—

Aus dem Vorwort:

Bisher beruhte die projektive Geometrie auf den Grundbegriffen Punkt, Gerade usw., und man glaubte, nicht auf diese Grundbegriffe verzichten zu können. Im Jahre 1935 zeigten Birkhoff und Menger, daß die projektive Geometrie vom Standpunkt der Verbandstheorie betrachtet ein irreduzibler endlichdimensionaler komplementärer modularer Verband ist. Hier ist der Grundbegriff die „Ordnung“, die z. B. besagt, daß ein Punkt in einer Geraden „enthalten“ ist, und wegen der Beschränkung auf endlich viele Dimensionen können Punkte, Geraden usw. auftreten. Es mußte also unter Verzicht auf diese Beschränkung möglich sein, eine neue Geometrie aufzustellen, die verbandstheoretisch wie die projektive Geometrie gebaut ist, in der es aber keine Punkte und Geraden gibt. Im vorliegenden Werk ist der Inhalt der Theorie derart dargestellt worden, daß er fast ohne Vorkenntnisse verständlich wird. Insbesondere wurde in Kapitel I eine ausreichende Einführung in die Verbandstheorie gebracht. Um die Beziehungen der kontinuierlichen Geometrie zur projektiven Geometrie und Quantentheorie zu zeigen, wurden die Kapitel III und XII eingeführt.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG